

מבחן C

תוכנית בנו ארבל 17.2.2025

משך המבחן: שלוש שעות. אין להשתמש במחשבון / חומר עזר.
יש להוכיח כל טענה ולהסביר כל תשובה. תשובה נכונה ללא הוכחה לא תקבל ניקוד.

1. עבור איזה k חיובי שלם המספר $3^k \cdot \binom{1001}{k}$ יהיה הכי גדול?

2. מצאו את המספר הממשי הקטן ביותר m עבורו $x^8 - x^6 + m \geq 0$ לכל x ממשי.

3. מה יותר גדול: $99^{99} \cdot 98^{98} \cdot 103^{103}$ או 10^{600} ?

4. נתון ריבוע ABCD ששטחו 1. מרכז הריבוע הוא O. פרבולה עם מוקד בנקודה O עוברת בנקודות A ו-C ומחלקת את הריבוע ABCD לשני חלקים; מצאו את השטחים של שני החלקים.

5. מצאו את כל המספרים המרוכבים שמקיימים את המשוואה:
 $1 - z - z^2 + z^3 - z^4 + z^5 + z^6 - z^7 = 0$.

6. נתבונן בקבוצת כל הנקודות (x, y) במישור המקיימות $0 \leq \frac{2x}{\pi} \leq y \leq \sin x$.
מהו השטח של הקבוצה?

7. מספר נקרא נפלא אם הוא מקיים את כל התכונות הבאות:

- המספר הוא 10-ספרתי,
- כל ספרה שווה ל-2 או ל-3 (לא בהכרח כל הספרות זהות),
- בסמוך לכל ספרה יש ספרה ששווה לה.

למשל 2233332333 או 2332223322 הם לא נפלאים. כמה מספרים נפלאים יש?

8. במרחב נתונים קוביה ומישור. עבור 5 קודקודים של הקוביה, המרחקים למישור הנתון הם מספרים שלמים. האם בהכרח המרחקים מהמישור הנתון ל-3 הקודקודים האחרים של הקוביה הם מספרים שלמים?

בהצלחה