School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע״ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

מבחן סיווג במתמטיקה 17.01.25

<u>הנחיות הבחינה:</u>

- משך המבחן: שלוש שעות.
- אין להשתמש במחשבון או בכל חומר עזר אחר.
- בבחינה 6 שאלות. יש לפתור את כל השאלות. תשובה נכונה ומלאה לכל שאלה נושאת 17 נקודות זכות. יש להוכיח כל טענה באופן מלא.
- בשאלות מרובות סעיפים, ניתן להתבסס על סעיפים קודמים, בין אם נפתרו ובין אם לא.

בהצלחה!

1. נסמן ב-$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$ את קבוצת המספרים השלמים.
נאמר שלקבוצה $A \subseteq \mathbb{Z}$ קיים מינימום, אם קיים $x \in A$ כך ש-$x \leq y$, לכל $y \in A$. נסמן ב-P את קבוצת כל תתי הקבוצות של $\mathbb{Z}$ שקיים להן מינימום (שימו לב, הקבוצה הריקה היא לא איבר של P).
נגדיר $f : P \to \mathbb{Z}$ על ידי $f(A) = \min(A)$. (שימו לב, f לוקחת קבוצה ומחזירה מספר).
   א. (11 נק') האם הפונקציה f היא חד-חד ערכית? האם הפונקציה f היא על? נמקו.
   ב. (6 נק') הוכיחו שלכל $A \in P$, קיימת $B \in P$ כך ש-$A \subseteq B$ ו-$f(A) > f(B)$.

2. (17 נק') מצאו את כל המספרים $x \in \mathbb{R}$ שמקיימים:
$$3^{2x+1} - 5 \cdot 3^{x+1} + 27 < 2 \cdot 9^{x} - 3^{x+1}.$$

3. (17 נק') מצאו את כל המספרים $x \in \mathbb{R}$ שמקיימים:
$$\sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \cos^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}.$$

4. א. (10 נק') הוכיחו כי לכל $1 \leq n \in \mathbb{N}$, המספר $9^n - 4^n$ מתחלק ב-5 ללא שארית.
ב. (7 נק') האם קיים $1 \leq n \in \mathbb{N}$ עבורו המספר $9^n - 4^n$ מתחלק ב-10?

5. א. (11 נק') מצאו את כל המספרים $z \in \mathbb{C}$ שמקיימים:

$$z^8 - 15z^4 = 16.$$

ב. (6 נק') חשבו את שטחו המצולע שקודקודיו הם הפתרונות $z \in \mathbb{C}$ מסעיף א', שמקיימים $\text{Re}\,(z) > 0$.

6. נסמן ב-$A = \{1, 2, ..., 10\}$ את קבוצת המספרים הטבעיים בין 1 לבין 10. נסמן ב-$B = \{1, 2, 3\}$. פתרו את הסעיפים הבאים (אין צורך לחשב חזקות במפורש):

א. (4 נק') כמה פונקציות $f : A \to B$ קיימות?

ב. (5 נק') כמה פונקציות $f : A \to B$ קיימות כך ש-$|\text{Im}\,(f)| = 1$?

ג. (4 נק') כמה פונקציות $f : A \to B$ קיימות כך ש-$|\text{Im}\,(f)| = 2$?
<u>הערה:</u> ניתן להיעזר בעובדה שאם X קבוצה סופית לא ריקה, ו-$|X| = n$, אז מספר תתי הקבוצות $Y \subseteq X$ כך ש-$Y \neq X$ ו-$Y \neq \emptyset$ הוא $2^n - 2$.

ד. (4 נק') כמה פונקציות $f : A \to B$ קיימות כך ש-f על?

<u>תזכורת:</u> $|\text{Im}\,(f)|$ מסמל את מספר האיברים בתמונה של f.