School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

מבחן סיווג במתמטיקה 20.09.2024

הנחיות הבחינה:

- משך המבחן: שלוש שעות.
- אין להשתמש במחשבון או בכל חומר עזר אחר.
- בבחינה 6 שאלות. יש לפתור את כל השאלות. תשובה נכונה ומלאה לכל שאלה נושאת 17 נקודות זכות. יש להוכיח כל טענה באופן מלא.
- בשאלות מרובות סעיפים, ניתן להתבסס על סעיפים קודמים, בין אם נפתרו ובין אם לא.
- **את התשובות יש לכתוב על גבי טופס המבחן.** במידה ותצטרכו לכתוב המשך של תשובה בדף אחר יש לציין בצורה ברורה היכן מופיע המשך הפתרון. במידת הצורך ניתן להשתמש בדפים נוספים בסוף הטופס.
- שימו לב, המחברת משמשת לצורך טיוטה ולא תבדק.

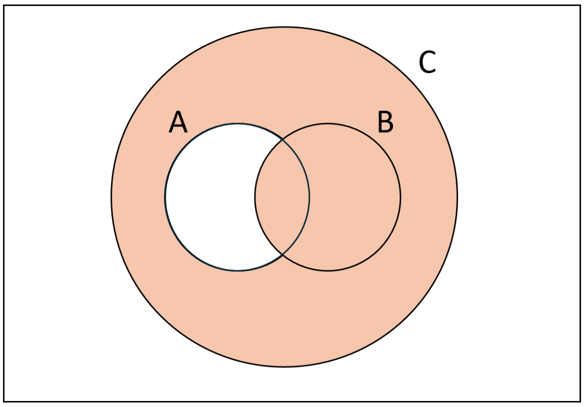
בהצלחה!

1. תהיינה A, B, C קבוצות. נניח ש-$A \subseteq C$ וגם $B \subseteq C$.

א. (3 נק׳) שרטטו דיאגרמת ון של הקבוצה $(C \setminus A) \cup B$.

ב. (14 נק׳) הוכיחו באופן פורמלי כי $A \subseteq B$ אם ורק אם $(C \setminus A) \cup B = C$.

א.



ב. ראשית נניח ש-$A \subseteq B$, ונוכיח ש-$(C \setminus A) \cup B = C$. נוכיח באמצעות הכלה דו כיוונית.

$\underline{(C \setminus A) \cup B \subseteq C}$: יהי $x \in (C \setminus A) \cup B$. אם $x \in C \setminus A$, בפרט $x \in C$. אחרת, $x \in B$. מהנתון, $B \subseteq C$ ולכן $x \in C$.

$\underline{(C \setminus A) \cup B \supseteq C}$: יהי $x \in C$. אם $x \in A$, מכיוון ש-$A \subseteq B$, נובע $x \in B$ ולכן $x \in (C \setminus A) \cup B$. אחרת, $x \notin A$ וגם $x \in C$. כלומר, $x \in C \setminus A$ ולכן $x \in (C \setminus A) \cup B$.

נניח כעת ש-$(C \setminus A) \cup B = C$, ונוכיח ש-$A \subseteq B$. יהי $x \in A$. מכיוון ש-$A \subseteq C$, נובע $x \in C$. מההנחה, $(C \setminus A) \cup B = C$. כלומר, $x \in (C \setminus A) \cup B$. מכיוון ש-$x \in A$, נובע $x \notin C \setminus A$. לכן, $x \in B$. בסך הכל הוכחנו $A \subseteq B$.

2. נגדיר פונקציה $v:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\cup\{0\}$ על ידי:

$$v\left(n\right)=\begin{cases}0 & \text{אי-זוגי } n\\ \max\left\{k\in\mathbb{N}\,\middle|\,\frac{n}{2^k}\in\mathbb{N}\right\} & \text{זוגי } n\end{cases}$$

<u>דוגמאות:</u> $v\left(39\right)=0$, מכיוון ש-39 מספר אי-זוגי.
$v\left(40\right)=3$, מכיוון ש-$\frac{40}{2^3}=\frac{40}{8}=5$ מספר טבעי, אבל $\frac{40}{2^4}=\frac{40}{16}=2.5$ לא, ולכן 3 הוא המספר הטבעי הגדול ביותר k כך ש-$\frac{40}{2^k}$ מספר טבעי.

א. (3 נק') חשבו את $v\left(1\right)$, $v\left(32\right)$ ו-$v\left(100\right)$.
ב. (5 נק') הוכיחו/הפריכו: v היא חח"ע.
ג. (5 נק') הוכיחו/הפריכו: v היא על $\mathbb{N}\cup\{0\}$.
ד. (4 נק') הוכיחו שלכל $n,m\in\mathbb{N}$ מתקיים:

$$\min\left\{v\left(n\right),v\left(m\right)\right\}\leq v\left(n+m\right)$$

<u>הדרכה:</u> נסו להוכיח בנפרד במקרה בו n ו-m זוגיים שניהם, ובמקרה בו לפחות אחד מהם אי-זוגי.

א. $v\left(1\right)=0$ מכיוון ש-1 אי-זוגי.
$v\left(32\right)=5$ מכיוון ש-$\frac{32}{2^5}=1$ מספר טבעי, אבל $\frac{32}{2^6}=0.5$ לא.
$v\left(100\right)=2$ מכיוון ש-$\frac{100}{2^4}=25$ מספר טבעי, אבל $\frac{100}{2^3}=12.5$ לא.

ב. הפונקציה איננה חח"ע. זאת מכיוון ש-$3\neq1$, אבל $v\left(1\right)=0=v\left(3\right)$ מפני ששניהם מספרים אי-זוגיים.

ג. הפונקציה היא על $\mathbb{N}\cup\{0\}$. ראשית, ראינו כבר ש-$v\left(1\right)=0$ ולכן 0 בתמונת הפונקציה. כמו כן, לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $v\left(2^n\right)=n$, מכיוון ש-$\frac{2^n}{2^n}=1$ מספר טבעי, אבל $\frac{2^n}{2^{n+1}}$ לא. לכן n בתמונת הפונקציה, ובסך הכל הפונקציה על $\mathbb{N}\cup\{0\}$.

ד. ראשית, אם n או m אי זוגיים, $v\left(n\right)=0$ או $v\left(m\right)=0$, בהתאמה. בפרט, $\min\left\{v\left(n\right),v\left(m\right)\right\}=0$. מכיוון ש-$v\left(n+m\right)\geq0$, נקבל

$$\min\left\{v\left(n\right),v\left(m\right)\right\}=0\leq v\left(n+m\right)$$

נניח בעת ש-n,m זוגיים. נסמן ב-$k=\min\left\{v\left(n\right),v\left(m\right)\right\}$. מכיוון ש-$k\leq v\left(n\right)$, נובע ש-$\frac{n}{2^k}$ טבעי. בדומה, מכיוון ש-$k\leq v\left(m\right)$, נובע ש-$\frac{m}{2^k}$ טבעי. לכן, $\frac{m+n}{2^k}=\frac{m}{2^k}+\frac{n}{2^k}$ טבעי. לכן:

$$\min\left\{v\left(n\right),v\left(m\right)\right\}=k\leq v\left(n+m\right)$$

3. מצאו את כל המספרים $x \in \mathbb{R}$ עבורם מתקיים:

$$4^{\cos^2(x)} + 8 = 3 \cdot 2^{\cos^2(x)+1}$$

המשוואה:

$$4^{\cos^2(x)} + 8 = 3 \cdot 2^{\cos^2(x)+1}$$

שקולה למשוואה:

$$\left(2^{\cos^2(x)}\right)^2 + 8 = 6 \cdot 2^{\cos^2(x)}$$

נסמן $t = 2^{\cos^2(x)}$. עלינו לפתור את המשוואה $t^2 + 8 = 6t$, כלומר $t^2 - 6t + 8 = 0$.
פתרונותיה הם:

$$t = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 8}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = 4, 2$$

נציב את t ונקבל $2^{\cos^2(x)} = 2$ או $2^{\cos^2(x)} = 4$. ולכן $\cos^2(x) = 1$ או $\cos^2(x) = 2$.
למשוואה $\cos^2(x) = 2$ אין פתרון. כמו כן,

$$\cos^2(x) = 1 \iff 1 - \sin^2(x) = 1 \iff \sin^2(x) = 0 \iff \sin(x) = 0$$

לכן הפתרון של המשוואה הוא:

$$x = \pi k, \forall k \in \mathbb{Z}$$

4. הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot 3^{i-1} = \frac{3^n (2n-1)+1}{4}$$

נוכיח באינדוקציה.

<u>בסיס האינדוקציה:</u> עבור $n=1$,

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot 3^{i-1} = \sum_{i=1}^{1} i \cdot 3^{i-1} = 1 \cdot 3^{1-1} = 1$$

וכן,

$$\frac{3^n (2n-1)+1}{4} = \frac{3^1 (2 \cdot 1 - 1)+1}{4} = \frac{3+1}{4} = 1$$

<u>צעד האינדוקציה:</u> נניח נכונות עבור $n=k$. כלומר, נניח שמתקיים:

$$\sum_{i=1}^{k} i \cdot 3^{i-1} = \frac{3^k (2k-1)+1}{4}$$

נוכיח עבור $n=k+1$. כלומר:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i \cdot 3^{i-1} = \frac{3^{k+1} (2(k+1)-1)+1}{4}$$

אכן,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} i \cdot 3^{i-1} &= \sum_{i=1}^{k} i \cdot 3^{i-1} + (k+1) \cdot 3^{k+1-1} \\
\text{הנחת האינדוקציה} &= \frac{3^k (2k-1)+1}{4} + (k+1) \cdot 3^k \\
&= \frac{3^k (2k-1)+1+4(k+1) \cdot 3^k}{4} \\
&= \frac{3^k (2k-1+4(k+1))+1}{4} \\
&= \frac{3^k (6k+3)+1}{4} \\
&= \frac{3^{k+1} (2k+1)+1}{4} \\
&= \frac{3^{k+1} (2(k+1)-1)+1}{4}
\end{aligned}$$

כלומר, הוכחנו את צעד האינדוקציה, ובסך הכל את טענת האינדוקציה.

5. פתרו את הסעיפים הבאים.

א. (9 נק') מצאו את כל הפתרונות $z \in \mathbb{C}$ למשוואה $z^6 = -64$. הציגו אותם תחילה בצורה הפולארית, $z = R \cdot \text{cis}\left(\theta\right)$, ולאחר מכן בצורה הקרטזית, $z = x + yi$.

ב. (5 נק') נסמן ב-$w \in \mathbb{C}$ את הפתרון מסעיף א' שמקיים $\text{Re}\left(w\right) > 0$ וגם $\text{Im}\left(w\right) > 0$. מצאו אילו מבין הפתרונות מסעיף א' מקיימים:

$$|z - w| = |w|$$

ג. (3 נק') חשבו את היקף המצולע שקודקודיו הם w והפתרונות מסעיף ב'.

א. נרשום $-64 = 64\text{cis}\left(\pi\right)$. אז:

$$z^6 = 64\text{cis}\left(\pi\right)$$

$\sqrt[6]{64} = 2$, ולכן:

$$\begin{aligned}
z_1 &= 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi \cdot 0}{6}\right) = 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i \\
z_2 &= 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi \cdot 1}{6}\right) = 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2i \\
z_3 &= 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi \cdot 2}{6}\right) = 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + i \\
z_4 &= 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi \cdot 3}{6}\right) = 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - i \\
z_5 &= 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi \cdot 4}{6}\right) = 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2i \\
z_6 &= 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi \cdot 5}{6}\right) = 2 \cdot \text{cis}\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - i
\end{aligned}$$

ב. $w = \sqrt{3} + i$. מתקיים $|w| = 2$. נשים לב שמתקיים:

$$\begin{aligned}
&|w - z_2| = |w - z_6| = 2 \\
&|w - z_3| = |w - z_5| = 2\sqrt{3} \\
&|w - z_4| = 4
\end{aligned}$$

ולכן הפתרונות שמקיימים את השוויון הם z_2 ו-z_6.

ג. המצולע הרלוונטי הוא המשולש שקודקודיו הם w, z_2 ו-z_6. היקף המשולש הוא:

$$\begin{aligned}
|w - z_2| + |w - z_6| + |z_2 - z_6| &= 2 + 2 + \sqrt{\left(\sqrt{3} - 0\right)^2 + \left(2 - (-1)\right)^2} \\
&= 4 + \sqrt{12}
\end{aligned}$$

6. למישל יש רשימת סרטים בהם היא מעוניינת לצפות. ברשימה 10 סרטי פנטזיה, 7 סרטי מתח ו-4 סרטים דוקומנטריים. מישל מעוניינת לצפות בשבוע הקרוב ב-6 סרטים שונים, 2 מכל ז'אנר, כל אחד ביום אחד.

א. (6 נק') כמה אפשרויות שונות יש למישל לבחירת 6 הסרטים מתוך הרשימה, אם היא מעוניינת לצפות בדיוק ב-2 סרטים מכל ז'אנר?

ב. (6 נק') לאחר בחירת 6 הסרטים, מישל מעוניינת לשבץ בכל יום ב-7 ימי השבוע, באיזה סרט תצפה, כאשר באחד מהימים לא תצפה באף סרט.
כמה אפשרויות שונות יש למישל לתכנון השבוע?

ג. (5 נק') כמה אפשרויות שונות יש למישל לתכנון השבוע, אם היא מעוניינת <u>לא</u> לצפות ב-2 הסרטים הדוקומנטריים ב-2 ימים צמודים?

א. מישל צריכה לבחור 2 מתוך 10 סרטי הפנטזיה, (לכך יש $\binom{10}{2}$) אפשרויות, 2 מתוך 7 סרטי המתח, (לכך יש $\binom{7}{2}$ אפשרויות) ו-2 מתוך 4 הסרטים הדוקומנטריים, (לכך יש $\binom{4}{2}$ אפשרויות). אין תלות בין בחירת הסרטים מכל ז'אנר, ולכן בסך הכל יש $\binom{10}{2} \cdot \binom{7}{2} \cdot \binom{4}{2}$ אפשרויות.

ב. ראשית נבחר את היום בו מישל לא תצפה באף סרט. לכך יש 7 אפשרויות. לאחר מכן, נבחר באיזה סדר תצפה מישל ב-6 הסרטים. מכיוון שהסרטים שונים, לכך יש $6!$ אפשרויות. לכך בסך הכל ישנן $7 \cdot 6! = 7!$ אפשרויות לתכנון השבוע.

ג. נחשב ראשית בכמה אפשרויות של תכנון השבוע מסעיף ב', מישל תצפה בשני הסרטים הדוקומנטריים בשני ימים צמודים. קודם כל נבחר את היום בו תצפה בסרט הראשון מבין השניים. לכך יש 6 אפשרויות (ימים ראשון עד שישי). לאחר מכן נבחר את היום בו לא תצפה בסרט. לכך יש 5 אפשרויות (הימים בהם טרם שובצו הסרטים הדוקומנטריים). כעת, יש $4!$ אפשרויות לשיבוץ 4 הסרטים האחרים ב-4 הימים הנותרים בשבוע. לבסוף, נכפיל ב-2, כמספר האפשרויות לבחור באיזה סדר לצפות בסרטים הדוקומנטריים. לכן מספר האפשרויות לתכנון השבוע בהן מישל תצפה בשני הסרטים הדוקומנטריים ברצף הוא:

$$6 \cdot 5 \cdot 4! \cdot 2 = 6! \cdot 2$$

ומספר האפשרויות בהן היא <u>לא</u> תצפה בשני הסרטים הדוקומנטריים בימים צמודים הוא:

$$7! - 6! \cdot 2 = 5 \cdot 6!$$

במידת הצורך, רשמו את המשך הפתרון בדף זה (ציינו את מספר השאלה):