



**School of Mathematical Sciences** בית הספר למדעי המתמטיקה  
The Raymond and Beverly Sackler הפקולטה למדעים מדויקים  
Faculty of Exact Sciences ע"ש ריימונד וברברי סאקלר  
Tel Aviv University אוניברסיטת תל אביב

## מבחן סיווג במתמטיקה 20.09.2024

### הנחיות הבחינה:

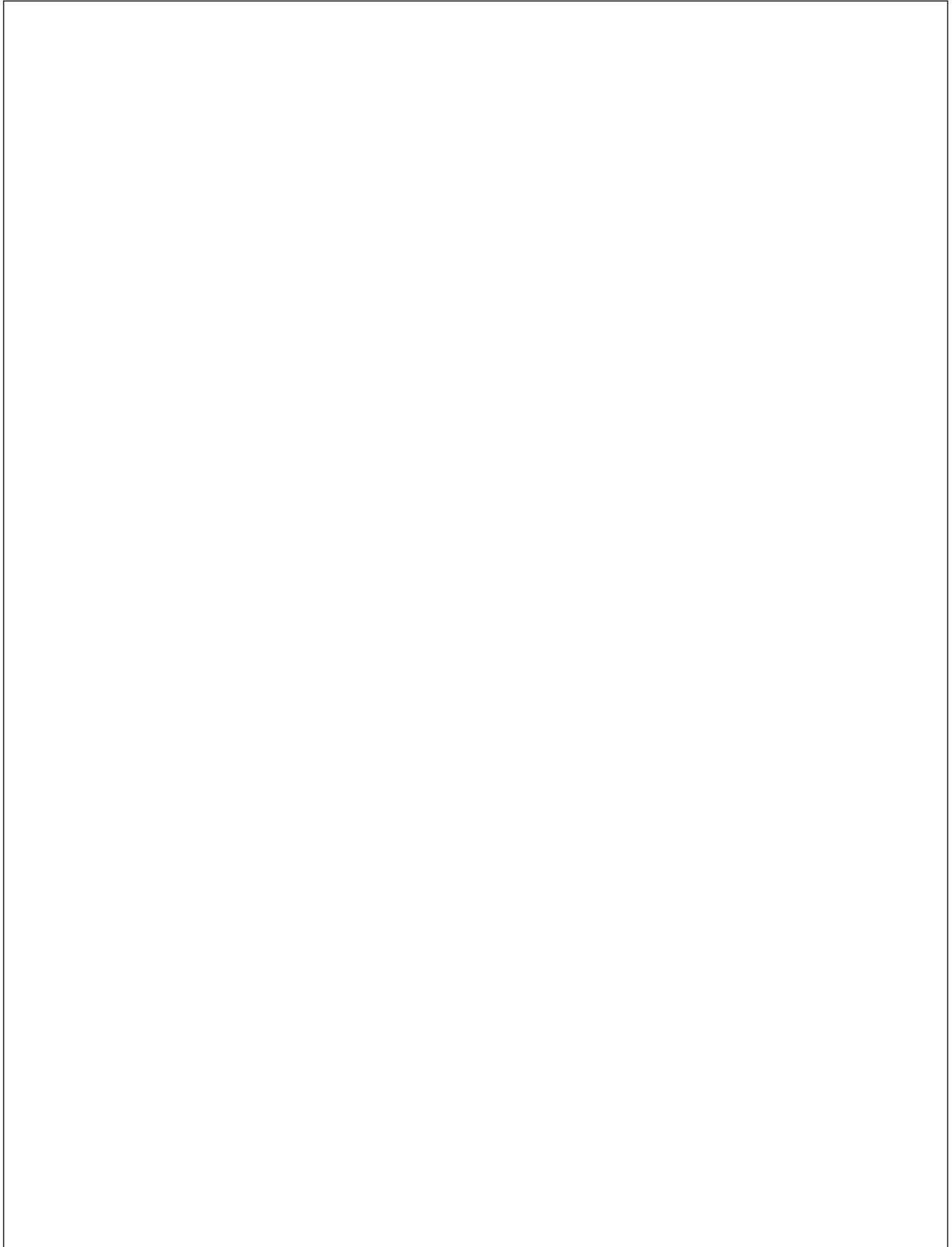
- משך המבחן: שלוש שעות.
- אין להשתמש במחשבון או בכל חומר עזר אחר.
- בבחינה 6 שאלות. יש לפתור את כל השאלות. תשובה נכונה ומלאה לכל שאלה נושאת 17 נקודות זכות. יש להוכיח כל טענה באופן מלא.
- בשאלות מרובות סעיפים, ניתן להתבסס על סעיפים קודמים, בין אם נפתרו ובין אם לא.
- **את התשובות יש לכתוב על גבי טופס המבחן.** במידה ותצטרכו לכתוב המשך של תשובה בדף אחר יש לציין בצורה ברורה היכן מופיע המשך הפתרון. במידת הצורך ניתן להשתמש בדפים נוספים בסוף הטופס.
- שימו לב, המחברת משמשת לצורך טיוטה ולא תבדק.

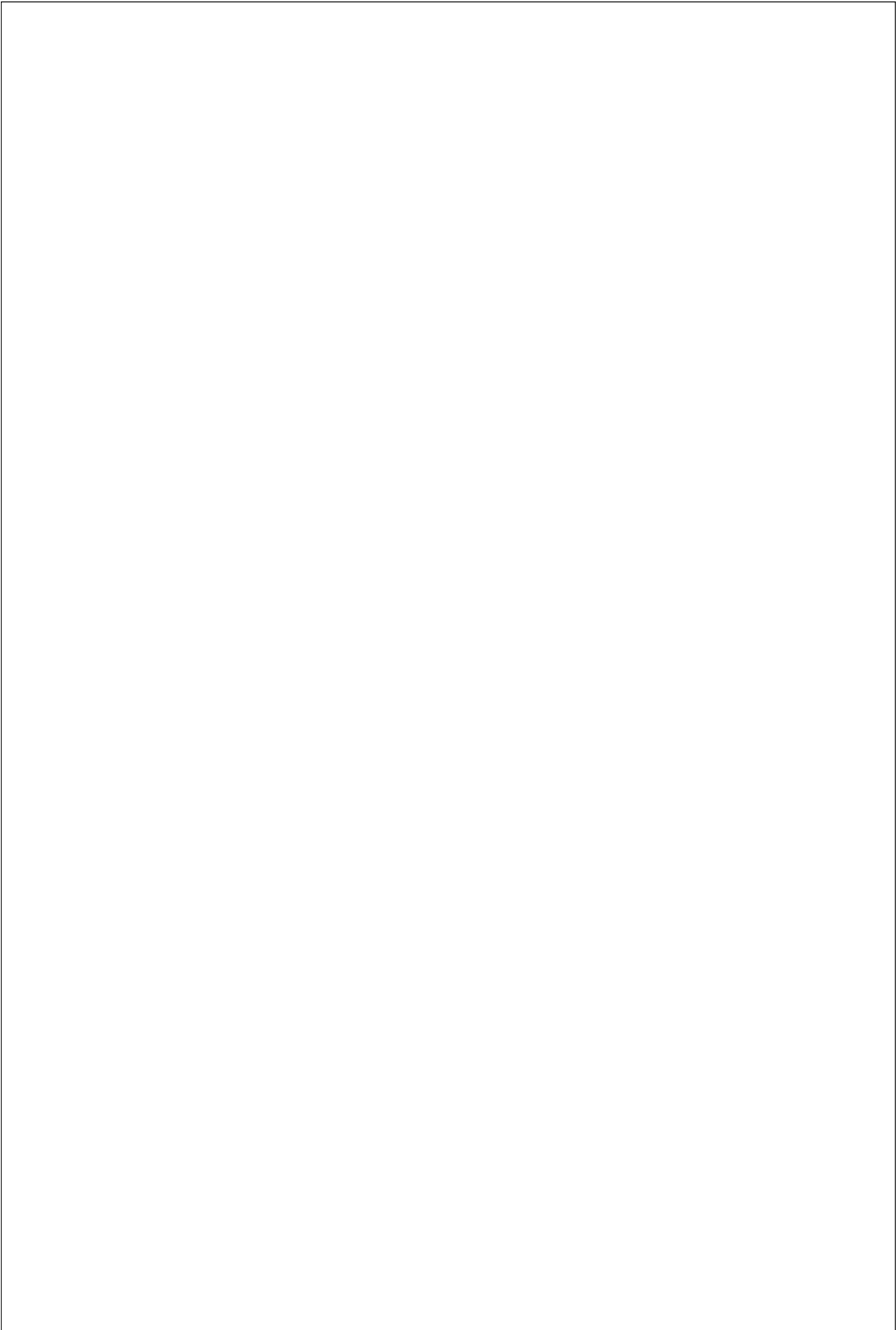
**בהצלחה!**

1. תהיינה  $A, B, C$  קבוצות. ניחש- $A \subseteq C$  וגם  $B \subseteq C$ .

א. (3 נק') שרטטו דיאגרמת ון של הקבוצה  $(C \setminus A) \cup B$ .

ב. (14 נק') הוכיחו באופן פורמלי כי אם  $A \subseteq B$  אם ורק אם  $(C \setminus A) \cup B = C$ .





2. נגדיר פונקציה  $v : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$  על ידי:

$$v(n) = \begin{cases} 0 & n \text{ אי-זוגי} \\ \max \{k \in \mathbb{N} \mid \frac{n}{2^k} \in \mathbb{N}\} & n \text{ זוגי} \end{cases}$$

דוגמאות:  $v(39) = 0$ , מכיוון ש-39 מספר אי-זוגי.

$v(40) = 3$ , מכיוון ש- $\frac{40}{2^3} = \frac{40}{8} = 5$  מספר טבעי, אבל  $\frac{40}{2^4} = \frac{40}{16} = 2.5$  לא, ולכן

3 הוא המספר הטבעי הגדול ביותר  $k$  כך ש- $\frac{40}{2^k}$  מספר טבעי.

א. (3 נק') חשבו את  $v(1)$ ,  $v(32)$  ו- $v(100)$ .

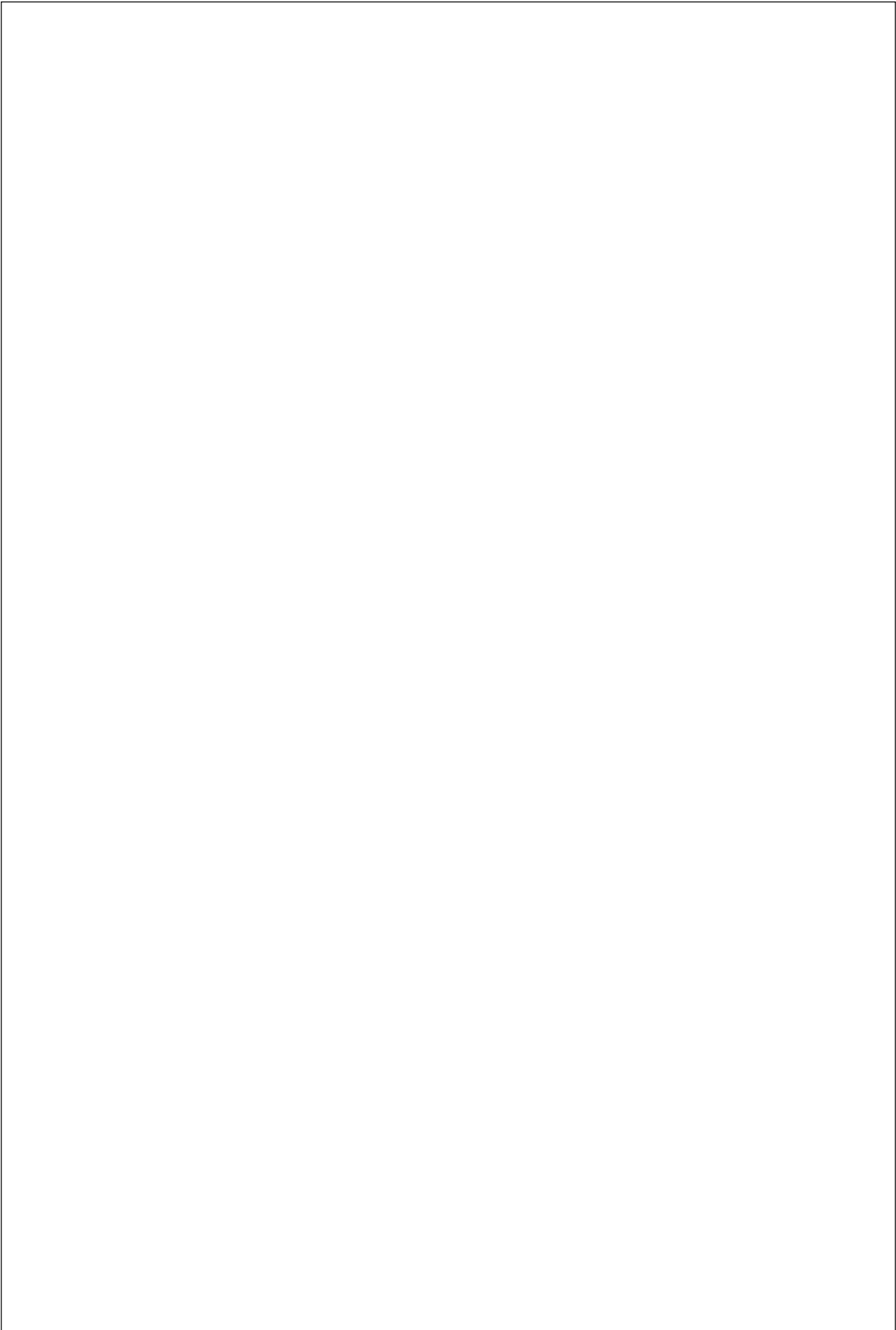
ב. (5 נק') הוכיחו/הפריכו:  $v$  היא חח"ע.

ג. (5 נק') הוכיחו/הפריכו:  $v$  היא על  $\mathbb{N} \cup \{0\}$ .

ד. (4 נק') הוכיחו שלכל  $n, m \in \mathbb{N}$  מתקיים:

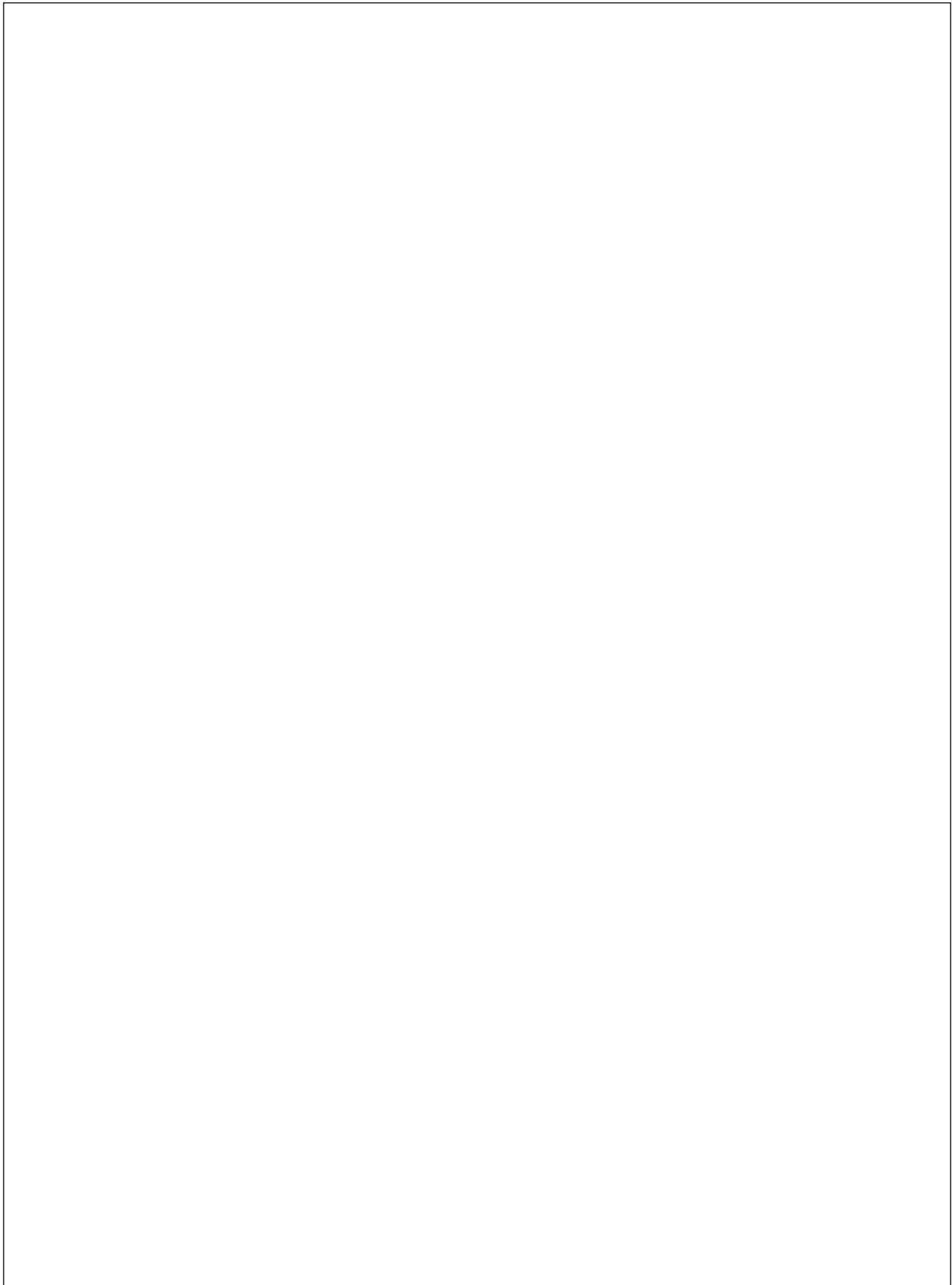
$$\min \{v(n), v(m)\} \leq v(n + m)$$

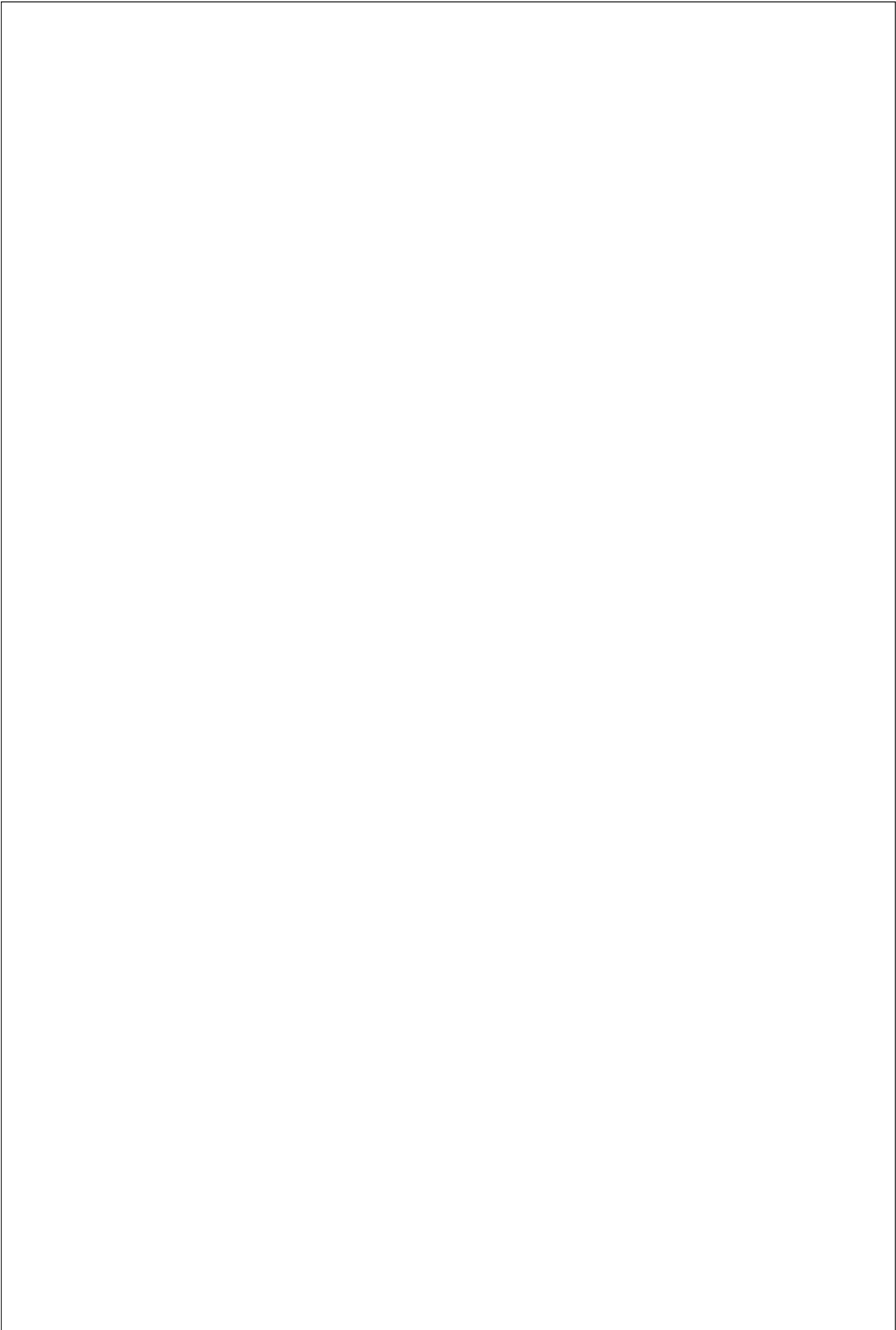
הדרכה: נסו להוכיח בנפרד במקרה בו  $n$  ו- $m$  זוגיים שניהם, ובמקרה בו לפחות אחד מהם אי-זוגי.



3. מצאו את כל המספרים  $x \in \mathbb{R}$  עבורם מתקיים:

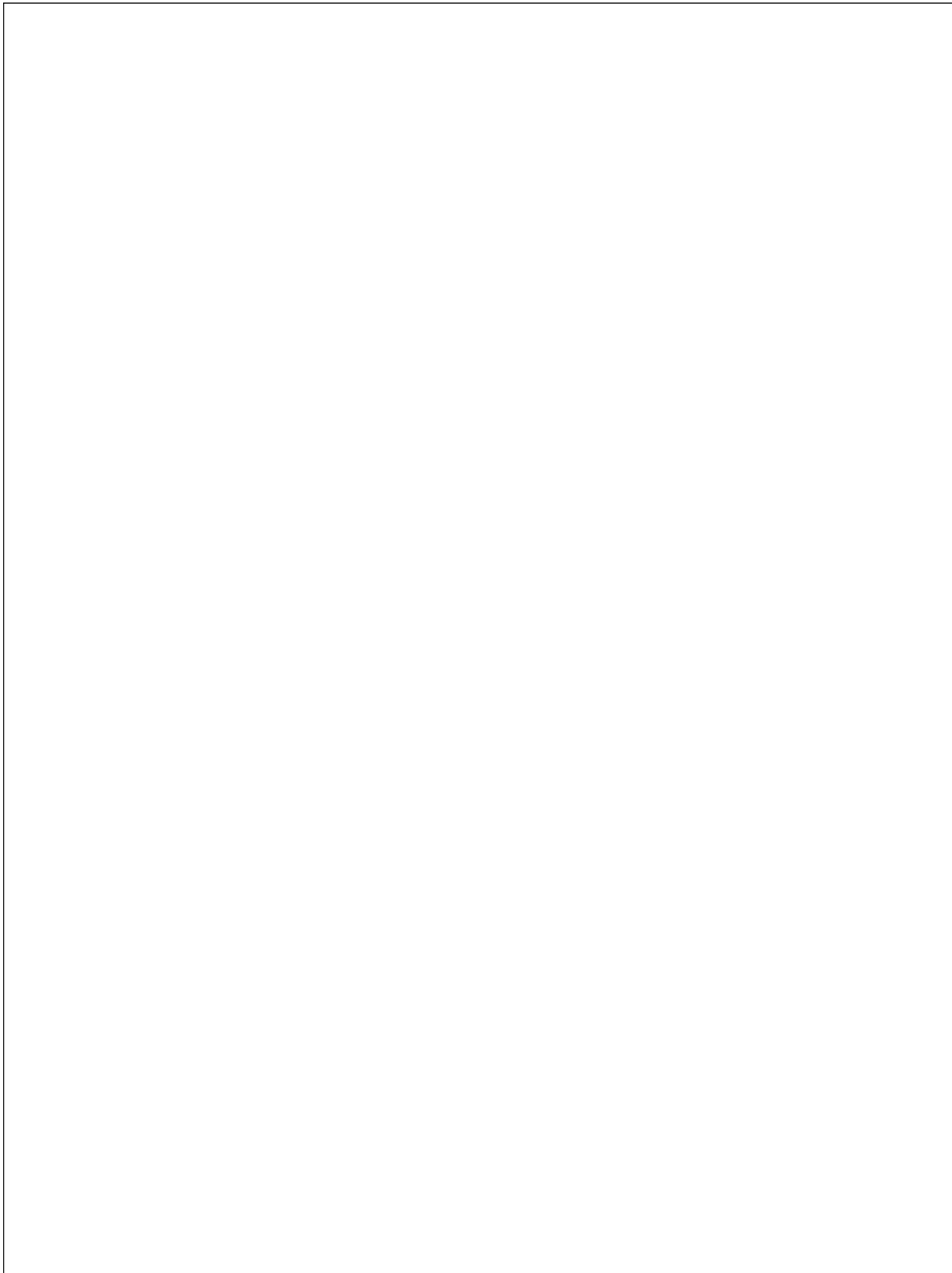
$$4^{\cos^2(x)} + 8 = 3 \cdot 2^{\cos^2(x)+1}$$



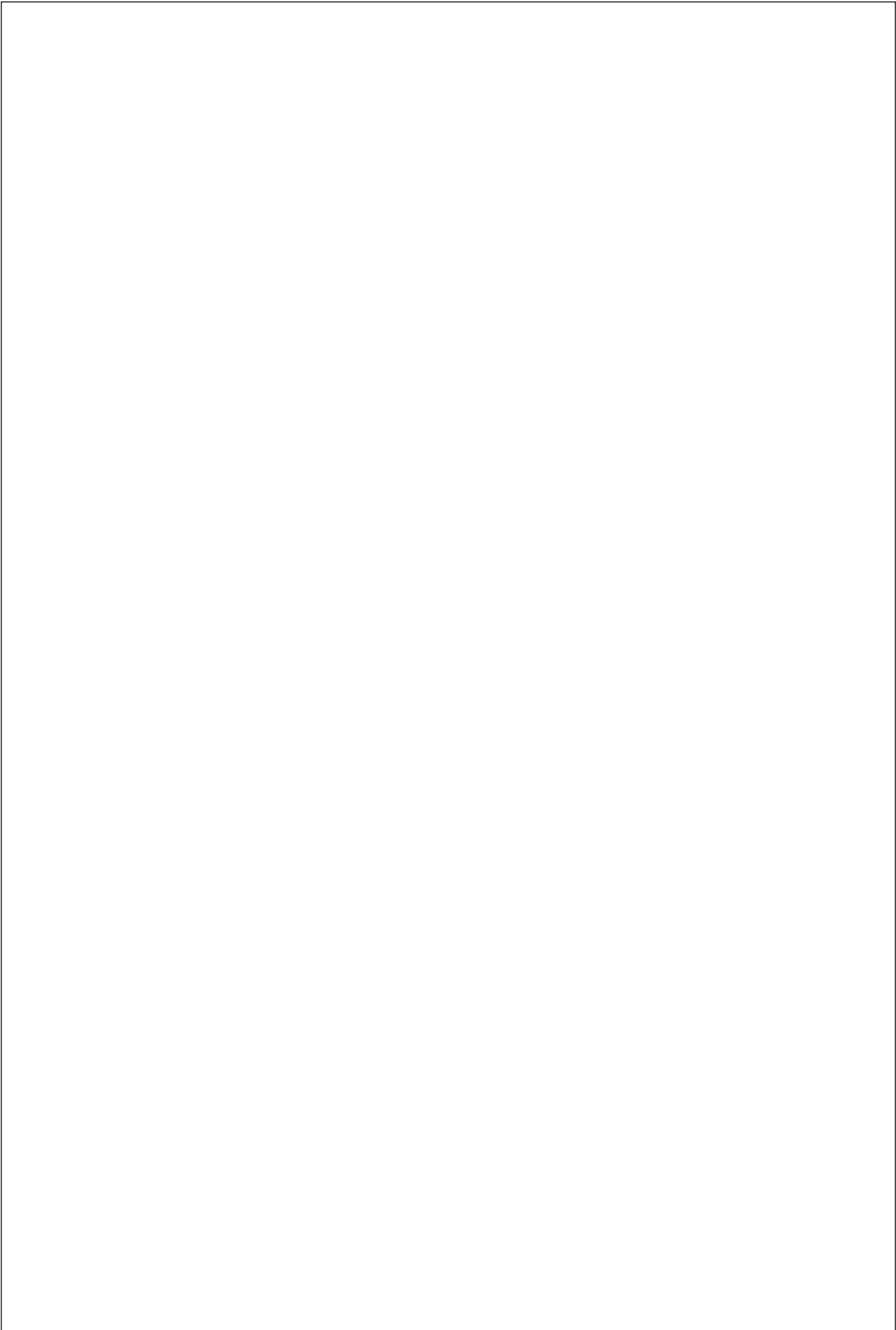


4. הוכיחו כי לכל  $n \in \mathbb{N}$  מתקיים:

$$\sum_{i=1}^n i \cdot 3^{i-1} = \frac{3^n (2n - 1) + 1}{4}$$





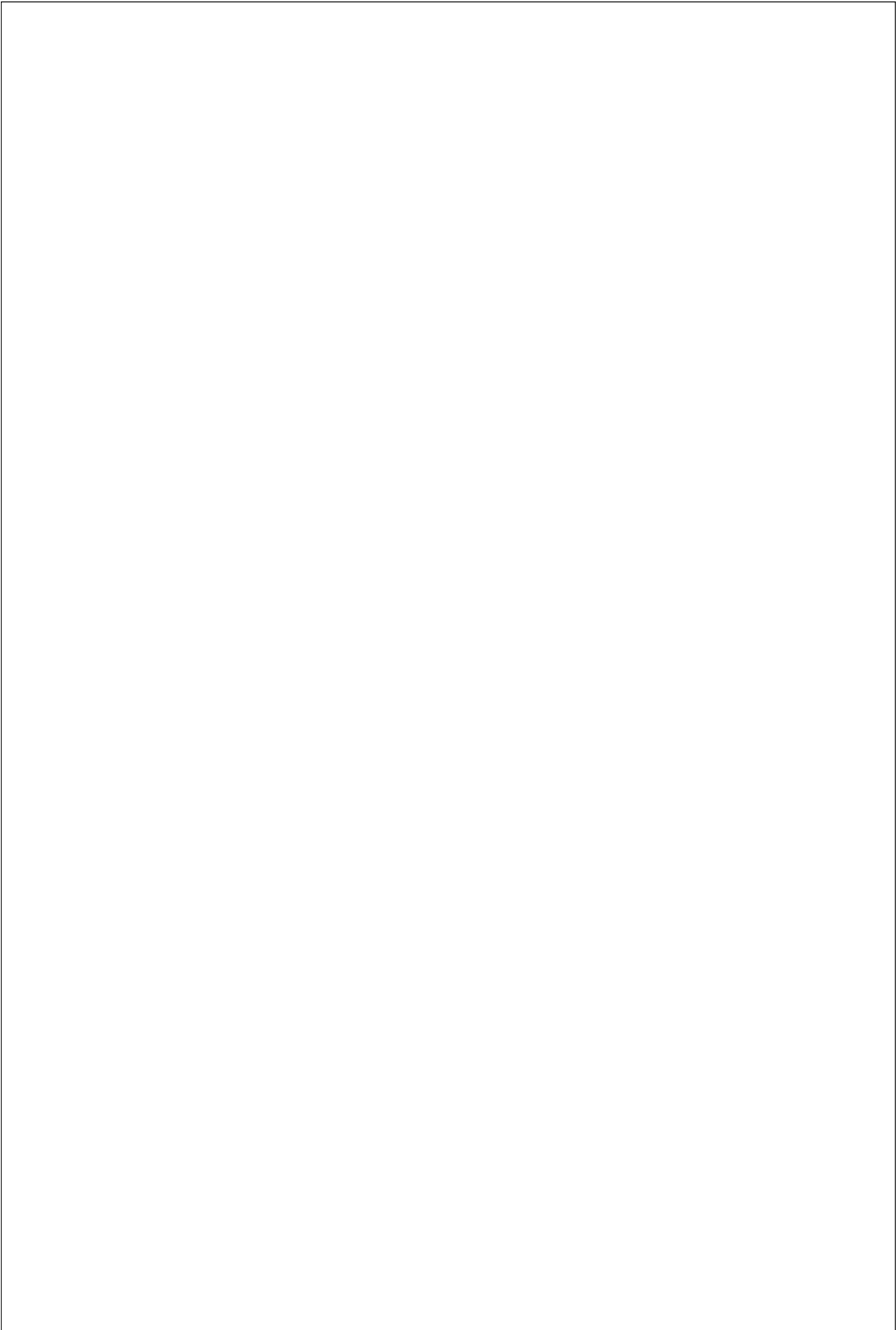


5. פתרו את הסעיפים הבאים.

- א. (9 נק') מצאו את כל הפתרונות  $z \in \mathbb{C}$  למשוואה  $z^6 = -64$ . הציגו אותם תחילה בצורה הפולארית,  $z = R \cdot \text{cis}(\theta)$ , ולאחר מכן בצורה הקרטזית,  $z = x + yi$ .
- ב. (5 נק') נסמן ב- $w \in \mathbb{C}$  את הפתרון מסעיף א' שמקיים  $\text{Re}(w) > 0$  וגם  $\text{Im}(w) > 0$ . מצאו אילו מבין הפתרונות מסעיף א' מקיימים:

$$|z - w| = |w|$$

- ג. (3 נק') חשבו את היקף המצולע שקודקודיו הם  $w$  והפתרונות מסעיף ב'.

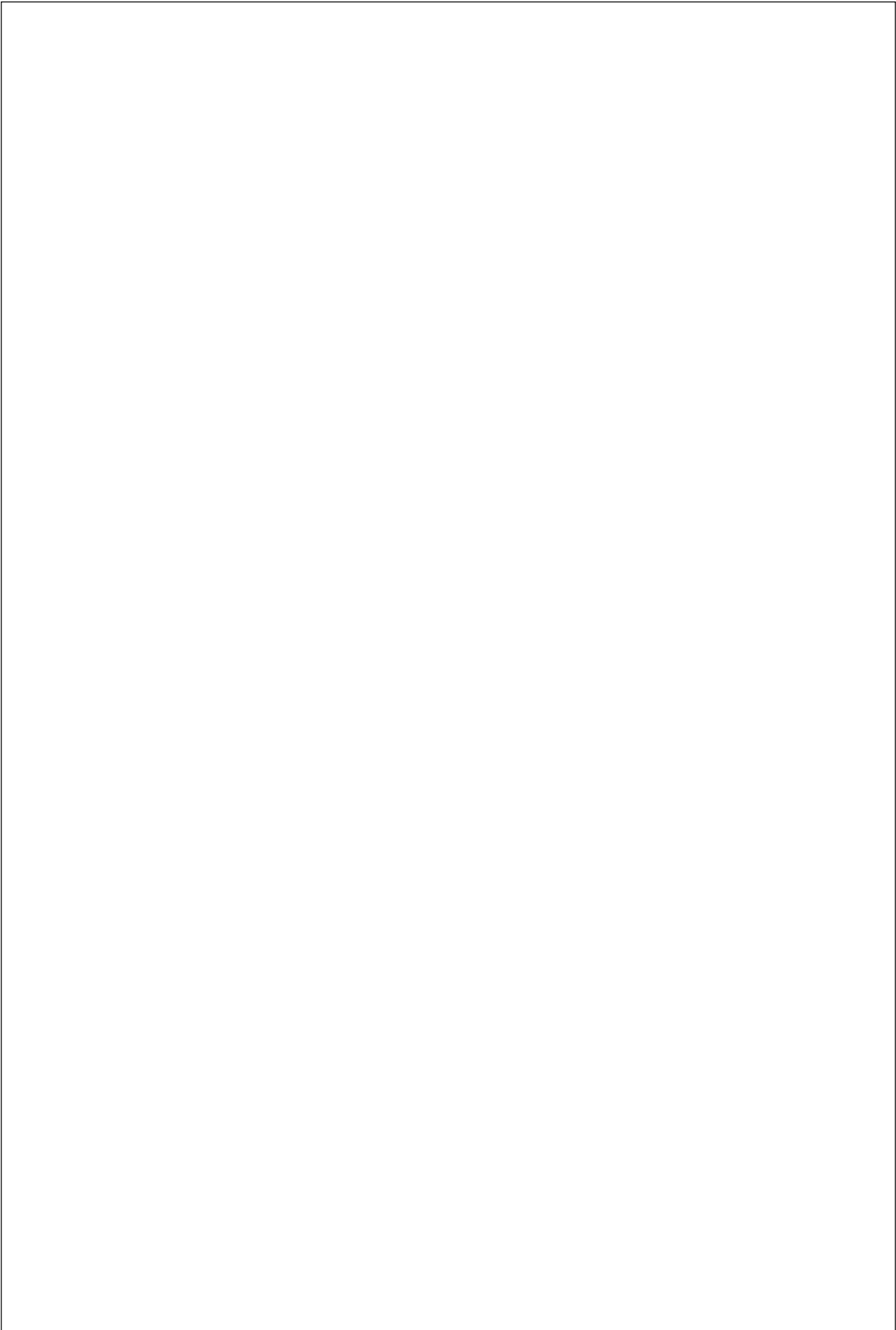


6. למישל יש רשימת סרטים בהם היא מעוניינת לצפות. ברשימה 10 סרטי פנטזיה, 7 סרטי מתח ו-4 סרטים דוקומנטריים. מישל מעוניינת לצפות בשבוע הקרוב ב-6 סרטים שונים, 2 מכל ז'אנר, כל אחד ביום אחר.

א. (6 נק') כמה אפשרויות שונות יש למישל לבחירת 6 הסרטים מתוך הרשימה, אם היא מעוניינת לצפות בדיוק ב-2 סרטים מכל ז'אנר?

ב. (6 נק') לאחר בחירת 6 הסרטים, מישל מעוניינת לשבץ בכל יום ב-7 ימי השבוע, באיזה סרט תצפה, כאשר באחד מהימים לא תצפה באף סרט. כמה אפשרויות שונות יש למישל לתכנן השבוע?

ג. (5 נק') כמה אפשרויות שונות יש למישל לתכנן השבוע, אם היא מעוניינת לא לצפות ב-2 הסרטים הדוקומנטריים ב-2 ימים צמודים?



במידת הצורך, רשמו את המשך הפתרון בדף זה (ציינו את מספר השאלה):