School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע״ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

פתרון מבחן סיווג במתמטיקה 12.07.2024

1. א) מצאו את כל ערכי $z \in \mathbb{C}$ עבורם $z^6 + (8-i)z^3 - 8i = 0$.
ב) חשבו את שטח המשולש במישור גאוס, המוגדר ע״י ערכי z מסעיף א׳ עבורם $\text{Im}\{z\} > 0$.

<u>פתרון:</u>

א) נסמן את $t = z^3, t \in \mathbb{C}$ ונקבל את המשוואה $t^2 + (8-i)t - 8i = 0$. כעת ע״י טרינום נקבל: $(t+8)(t-i) = 0$. לכן: $t = -8 \vee t = i \Rightarrow z^3 = -8 \vee z^3 = i$.
ע״י נוסחת דה-מואבר להוצאת שורש במספרים מרוכבים נקבל את הפתרונות הבאים:

$$z^3 = -8 \Rightarrow z \in \left\{2cis\left(\frac{\pi}{3}\right), 2cis(\pi), 2cis\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right\},$$

$$z^3 = i \Rightarrow z \in \left\{cis\left(\frac{\pi}{6}\right), cis\left(\frac{5\pi}{6}\right), cis\left(\frac{9\pi}{6}\right)\right\}$$

וסך הכל נקבל את הפתרונות:

$$z \in \left\{2cis\left(\frac{\pi}{3}\right), 2cis(\pi), 2cis\left(\frac{5\pi}{3}\right), cis\left(\frac{\pi}{6}\right), cis\left(\frac{5\pi}{6}\right), cis\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right\}$$

ב) נמיר את הפתרונות לתצוגה הקרטזית (סדר הנקודות תואם לתצוגה הפולארית שלעיל):

$$z \in \left\{-1+\sqrt{3}i, -2, -1-\sqrt{3}i, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -i\right\}$$

כעת, ניתן לראות כי הנקודות שמקיימות $\text{Im}\{z\} > 0$ אלו הנקודות שנסמנן ע״י A,B,C:

$$(A,B,C) = \left(-1+\sqrt{3}i, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

כעת ניתן לראות כי אורך $BC = \sqrt{3}$, וכן הגובה מנקי׳ A לצלע BC הינו $h = \sqrt{3} - \frac{1}{2}$ ולכן שטח המשולש במישור גאוס: $S_\Delta = \frac{h \cdot BC}{2} = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}$.

2. כל מספר $x \in \mathbb{R}^+$ ניתן לפרק לסכום של הערך השלם התחתון, שיסומן ע״י $\lfloor x \rfloor$, שהוא המספר <u>השלם</u> הגדול ביותר הקטן או שווה ל- x, ולערך השברי שלו, שיסומן ע״י $\{x\}$. כלומר: $\forall x \in \mathbb{R}^+ : x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$.
למשל: $3.5 = \lfloor 3.5 \rfloor + \{3.5\} = 3 + 0.5$, $0.75 = \lfloor 0.75 \rfloor + \{0.75\} = 0 + 0.75$.
א) יהי $k \in \mathbb{N}$ ונסמן $y = k + \frac{1}{k}$. הראו כי מתקיים: $\{y^2\} = \{y\}^2$.
ב) יהי $x > 1$. הוכיחו כי: $\{x^2\} = \{x\}^2 \to x \in \mathbb{Q}$.

פתרון:

א) ראשית נשים לב כי מתקיים: $\lfloor y \rfloor = k, \{y\} = \frac{1}{k}$. וכן, מתקיים: $y^2 = k^2 + 2 + \frac{1}{k^2}$.
לכן: $\{y\}^2 = \left\{\frac{1}{k^2}\right\} = \left\{k^2 + 2 + \frac{1}{k^2}\right\} = \{y^2\}$ כדרוש.

ב) ידוע כי $\{x\}^2 = \{x^2\}$. בנוסף, מתקיים: $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$. לכן, מתקיים כי: $\{x^2\} = \{\lfloor x \rfloor^2 + 2\lfloor x \rfloor\{x\} + \{x\}^2\}$. כעת על מנת שיתקיים $\{x^2\} = \{x\}^2$ אזי שבהכרח מתקיים $2\lfloor x \rfloor\{x\} \in \mathbb{Z}$ (כיוון ש- $\{\lfloor x \rfloor^2\} = 0$ וכן $\{\{x\}^2\} = \{x\}^2$, אזי נדרש כי יתקיים $\{2\lfloor x \rfloor\{x\}\} = 0$, וזה מתקיים כאשר הערך הינו שלם). נסמן $2\lfloor x \rfloor\{x\} = m, m \in \mathbb{Z}$.
לכן: $\{x\} = \frac{m}{2\lfloor x \rfloor}$ וכן $x = \lfloor x \rfloor + \{x\} = \lfloor x \rfloor + \frac{m}{2\lfloor x \rfloor} = \frac{2\lfloor x \rfloor^2 + m}{2\lfloor x \rfloor}$. נשים לב שגם המונה וגם המכנה הם מספרים שלמים (כל גורם בנפרד הוא מספר שלם השונה מ-0, שהרי $x > 1$ ולכן $\lfloor x \rfloor \geq 1$). לכן, ניתן לרשום את x כמנה בין שני מספרים שלמים ולכן $x \in \mathbb{Q}$.
סך הכל, הראנו שעבור $x > 1$ אם $\{x^2\} = \{x\}^2$ אז $x \in \mathbb{Q}$ כדרוש.

.3 א) הראו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ זוגי הביטוי $3 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n$ מתחלק ב-5 ללא שארית.
ב) האם הביטוי $3 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n$ מתחלק ב-30 לכל $n \in \mathbb{N}$ זוגי? הסבירו.

פתרון:

א) נוכיח באינדוקציה.

- מקרה הבסיס - עבור $n = 2$: $3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 = 12 + 18 = 30 = 5 \cdot 6$.
- הנחת האינדוקציה - נניח כי קיים $n \in \mathbb{N}$ זוגי עבורו הביטוי $3 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n$ מתחלק ב-5 ללא שארית.
- צעד האינדוקציה – נראה שהביטוי $3 \cdot 2^{n+2} + 2 \cdot 3^{n+2}$ מתחלק ב-5 ללא שארית (הסיבה להוספת 2 במקום 1 נובעת מכך שעלינו להראות עבור ערכי n זוגיים. לכן אם n זוגי, הערך הזוגי הבא הינו $n + 2$). מתקיים:
$$3 \cdot 2^{n+2} + 2 \cdot 3^{n+2} = 12 \cdot 2^n + 18 \cdot 3^n = 4(3 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n) + 10 \cdot 3^n$$
כעת, מהנחת האינדוקציה, הגורם השמאלי ב-5 ללא שארית. הגורם הימני מתחלק ב-5 ללא שארית כיוון שאחד מגורמיו מתחלק ב-5 ללא שארית (10).
סך הכל, יש לנו סכום בין 2 ערכים המתחלקים ב-5 ללא שארית, ולכן כל הביטוי מתחלק ב-5 ללא שארית.

מכך, הוכחנו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ זוגי הביטוי $3 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n$ מתחלק ב-5 ללא שארית.

ב) הביטוי $3 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n$ מתחלק ב-30 לכל $n \in \mathbb{N}$ זוגי מכיוון שהביטוי $3 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n$ מתחלק גם ב-5 וגם ב-6 לכל $n \in \mathbb{N}$ זוגי (מתחלק ב-5 הוכחנו בסעיף א', ומתחלק ב-6 עקב העובדה שגורמיו הם 2 ו-3).

4. מצאו את כל ערכי $x \in \mathbb{R}$ המקיימים: $3^{\sqrt{\frac{1}{|\cos(x)|}}+1} - 33 \le -8 \cdot 3^{\sqrt{\frac{1}{|\cos(x)|}}}$.

<u>פתרון:</u>

ראשית נשים לב כי תחום ההגדרה בבעיה הוא $|\cos(x)| \neq 0$ (תוכן השורש תמיד אי שלילי).
לכן: $|\cos(x)| \neq 0 \to \cos(x) \neq 0 \to x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

כעת נפתור את אי השוויון. נסמן $t = 3^{\sqrt{\frac{1}{|\cos(x)|}}}$ ונקבל: $3 \cdot t - 33 \le -8 \cdot t$ שפתרונו הוא:
$11t \le 33 \to t \le 3$. נציב את t ונקבל: $3^{\sqrt{\frac{1}{|\cos(x)|}}} \le 3^1$ ומכך שפונקציה מעריכית היא מונוטונית עולה ממש נקבל: $\sqrt{\frac{1}{|\cos(x)|}} \le 1$. מכך ששני האגפים אי שליליים, ניתן להעלות בריבוע ולשמור על סימן אי השוויון: $\frac{1}{|\cos(x)|} \le 1$ וכן ניתן לכפול במכנה (שתמיד אי שלילי).
נקבל: $|\cos(x)| \ge 1$. כעת, מכיוון שלפי הגדרת הפונקציה-$\cos(x)$ מקיימת $|\cos(x)| \le 1$, אזי שבהכרח מתקיים $|\cos(x)| = 1$. לכן: $\cos(x) = 1 \vee \cos(x) = -1$ שפתרונותיהן:
$x = 0 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \vee x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. כעת, נאחד את קבוצות הפתרונות ובנוסף נדרוש חיתוך עם תחום ההגדרה, ונקבל כי קבוצת הפתרונות של אי השוויון היא:

$$x \in \{\pi k | k \in \mathbb{Z}\}$$

5. בכל אחד מן הסעיפים הבאים קבעו אם הטענה נכונה או שגויה והסבירו.
נתונה הפונקציה $f(x)$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. נגדיר את הפונקציות הבאות: $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ כך שמתקיים: $\forall x \in \mathbb{R} : g(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}, h(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$.

א) הפונקציה g אי-זוגית והפונקציה h זוגית.
ב) ייתכן והפונקציה h היא חד-חד ערכית (חח"ע).
ג) הפונקציה $g \circ h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ היא בהכרח אי-זוגית.
ד) אם ניתן לרשום את הפונקציה f כסכום של פונקציה זוגית H ופונקציה אי-זוגית G, כלומר $f = G + H$, אזי מתקיים שבהכרח מתקיים כי $G = g, H = h$.

<u>פתרון:</u>

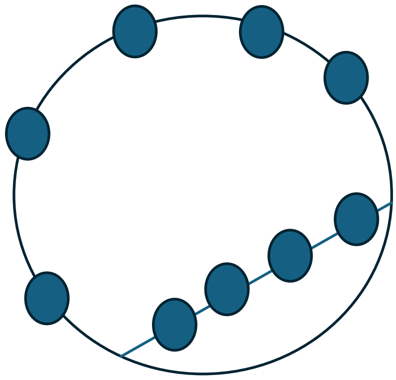
א) הטענה נכונה.
ניתן לראות כי: $h(-x) = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = \frac{f(x)+f(-x)}{2} = h(x)$ ולכן h זוגית, וכן:
$g(-x) = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -\frac{f(x)-f(-x)}{2} = -g(x)$ ולכן g אי-זוגית.

ב) הטענה שגויה.
עבור פונקציה זוגית, לכל איבר בטווח אם x מהתחום מהווה מקור עבורו, הרי שגם האיבר $-x$ מהתחום הינו מקור עבורו, שהרי לפונקציה זוגית $h(-x) = h(x)$. לכן, כל פונקציה זוגית, ובפרט הפונקציה h אינה חח"ע (כיוון שמתקיים $-x \neq x$ אבל $h(-x) = h(x)$, לכל $x \neq 0$ קיבלנו שהמקורות ששונים אך התמונות שוות, והפונקציה לא חד-חד-ערכית.

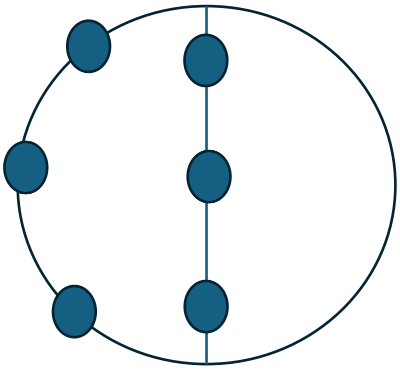
ג) הטענה שגויה.
נפריך ע״י דוגמה נגדית: תהי $f(x) = x + 1$. מכך, נסיק כי:
$1 = \frac{f(x)+f(-x)}{2} = x, h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2} = g(x)$. כעת, ניתן לראות כי מתקיים:
$g \circ h(x) = g\big(h(x)\big) = g(1) = 1$ וזוהי פונקציה זוגית בסתירה לטענה.
באופן כללי, ניתן לראות כי ההרכבה מקיימת:
$g \circ h(-x) = g\big(h(-x)\big) = g\big(h(x)\big) = g \circ h(x)$ כאשר המעבר השני נובע מכך שהפונקציה h היא זוגית. כלומר, פונקציית ההרכבה הינה זוגית ולא אי-זוגית.

ד) הטענה נכונה.
נרשום את הפונקציה f כסכום של פונקציה זוגית H ופונקציה אי-זוגית G, כלומר מתקיים: $f(x) = G(x) + H(x)$. מכך ש-H זוגית ואי-זוגית G, אזי שמתקיים:
$f(-x) = G(-x) + H(-x) = -G(x) + H(x)$. כעת, נוכל לבודד את $G(x), H(x)$ ונקבל: $h(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} = g(x), H(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2} = G(x)$ כדרוש.

6. נניח מעגל ועליו $n \geq 3$ נקודות שונות. במעגל זה, עובר מיתר כך שהיקף המעגל מתחלק ל-2: חלק אחד עם כל n הנקודות, וחלק אחד ללא נקודות. על המיתר ישנן $k \geq 3$ נקודות, כך שכל הנקודות נמצאות על המיתר ולא על המעגל. <u>לא ייתכן</u> מצב בו נקודה מתוך n הנקודות שעל המעגל נמצאת על החיתוך של המיתר עם המעגל.
דוגמאות:



דוגמה זו תואמת עבור $n = 5, k = 4$.



דוגמה זו תואמת עבור $n = 3, k = 3$.

שימו לב כי אין הכרח למרחקים שווים בין הנקודות.

א) כמה משולשים ניתן ליצור מהנקודות שעל המעגל <u>ולא</u> על המיתר?
ב) כמה משולשים ניתן ליצור מכל הנקודות (על המעגל ועל המיתר)?
ג) כמה מרובעים שאחת מצלעותיהן היא <u>חלק \ כל</u> מהמיתר ניתן ליצור?

School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע״ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

<u>פתרון:</u>

א) למעשה, כדי ליצור משולש עלינו לבחור 3 נקודות על המעגל. את הנקודות נבחר ללא חזרות (כי נצטרך 3 נקודות שונות) וללא חשיבות לסדר (3 נקודות יוצרות את אותו המשולש). לכן, כמות המשולשים שניתן ליצור מהנקודות שעל המעגל ולא על המיתר: $\binom{n}{3}$.

ב) כעת, מספר הנקודות מתוכן נצטרך לבחור הוא $n+k$, אך נשים לב כי לא ייתכן ש-3 הנקודות נמצאות כולן על המיתר, אחרת נקבל קו ישר ולא משולש. לכן, מספר המשולשים שניתן ליצור מכלל הנקודות(על המעגל ועל המיתר): $\binom{n+k}{3}-\binom{k}{3}$.

ג) כעת, על מנת ליצור מרובע נצטרך לבחור 4 נקודות. אבל, על מנת שאחת מצלעות המרובע תהיה חלק \ כל המיתר, נצטרך ש-2 מתוך 4 הנקודות יהיו על המיתר, וה-2 הנותרות יהיו על המעגל. לכן, מספר המרובעים שניתן ליצור באופן הנ״ל: $\binom{n}{2}\cdot\binom{k}{2}$.