



**School of Mathematical Sciences** בית הספר למדעי המתמטיקה  
 The Raymond and Beverly Sackler הפקולטה למדעים מדויקים  
 Faculty of Exact Sciences ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר  
 Tel Aviv University אוניברסיטת תל אביב

## מבחן סיווג במתמטיקה (10.01.2020)

משך המבחן: שלוש שעות  
 אין להשתמש במחשבון או בכל חומר עזר אחר  
 יש להוכיח כל טענה באופן מלא. תשובה נכונה ומלאה לכל שאלה נושאת 17 נקודות זכות

1. סיסמה של כרטיס אשראי מורכבת מ-4 ספרות (מספרים שלמים מ-0 עד 9) היכולות לחזור על עצמן. אותן ספרות בסדר שונה נחשבות לסיסמאות שונות.  
 א. מהו המספר הכולל של סיסמאות שונות?  
 ב. בכמה מהן לא מופיעה הספרה 1?  
 ג. בכמה מהן מופיעה לפחות אחת הספרות 3 או 7?

2. א. מצאו את כל הפתרונות הממשיים של המשוואה  $x^{\log_2 x} = \frac{1}{4}x^3$  ( $0 < x$ )

ב. מצאו את קבוצת כל המספרים הממשיים  $x$  שעבורם  $\sqrt{3^{x^2-3x} - \frac{1}{9}} < \frac{2\sqrt{2}}{3}$

3. הוכיחו שלכל מספר טבעי  $1 \leq n$ , המספר  $\frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{3}$  אף הוא מספר טבעי.

4. על הישר הממשי נתונות הקבוצות  $A = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}\}$   $B = \{x \in \mathbb{R} : |x - 4| = 1\}$

א. כתבו את הקבוצות במפורש (כקטעים, איחודם של קטעים, נקודות מבודדות וכיו"ב) וסמנו אותן על ישר שתציירו במחברת המבחן.

ב. נגדיר את הקבוצות  $C = \{a + b : a \in A, b \in B\}$   $D = \{a \cdot b : a \in A, b \in B\}$   
 עשו לקבוצות אלה מה שעשיתם בסעיף א' לקבוצות A ו-B.

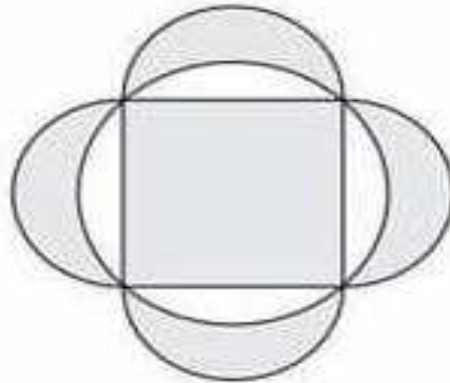
5. הוכיחו (אפשר באינדוקציה) שלכל  $n$  טבעי, קיים פולינום  $p_n(t) = a_0^n + a_1^n t + a_2^n t^2 + \dots + a_n^n t^n$  ממעלה  $n$  (ה- $a_k^n$  קבועים ממשיים) כך ש-  $\cos(nx) = p_n(\cos x)$  כלומר שהפונקציה  $\cos(nx)$  היא פולינום ממעלה  $n$  במשתנה  $t = \cos(x)$ . כתבו במפורש את הפולינומים  $p_2(t), p_3(t)$ .  
 לעזרתכם:  $\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$



**School of Mathematical Sciences**  
The Raymond and Beverly Sackler  
Faculty of Exact Sciences  
Tel Aviv University

**בית הספר למדעי המתמטיקה**  
הפקולטה למדעים מדויקים  
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר  
אוניברסיטת תל אביב

6 (סהרוני היפוקרטס). נתון ריבוע החסום במעגל. על כל אחת מצלעות הריבוע (מחוצה לו) בונים חצי מעגל שקוטרו צלע הריבוע ומרכזו אמצע אותה צלע (ראו תרשים). כך נוצרים ארבעה סהרונים (ירחים) המוגבלים בין חצאי המעגלים שהוספנו לבין הקשתות המתאימות של המעגל החוסם את הריבוע.  
הוכיחו שסכום שטחי ארבעת הסהרונים שווה לשטח הריבוע.



**ב ה צ ל ח ה**