תורת הקבוצות – פתרונות

חלק א – סימון קבוצות ושייכות

1. אילו מהטענות הבאות נכונות?

א. $1 \in \{1\}$. נכון.
ב. $5 \in \mathbb{N}$. נכון.
ג. $5 \in \{\mathbb{N}\}$. לא נכון.
ד. $17 \in \{0,2,4,6,\dots\}$. לא נכון.
ה. $-5 \in \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 > 0\}$. לא נכון.
ו. $\emptyset \in \emptyset$. לא נכון.
ז. $\emptyset \in \{\emptyset\}$. נכון.
ח. $\emptyset \in \{\{\emptyset\}\}$. לא נכון.
ט. $\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$. לא נכון.

חלק ב – הכלה ושייכות

1. קבעו האם $A \subseteq B$ כאשר:

א. $A = 1, B = \mathbb{N}$. לא נכון.
ב. $A = \{3,4\},\ B = \mathbb{Z}$. נכון.

2. קבעו האם $A \subseteq B$ והאם $A \in B$ כאשר:

א. $A = \emptyset, B = \{\emptyset\}$. תשובה: $A \subseteq B\ \ A \in B$.
ב. $A = \emptyset, B = \emptyset$. תשובה: $A \subseteq B\ \ A \notin B$.
ג. $A = \{\emptyset\}, B = \{\emptyset\}$. תשובה: $A \subseteq B\ \ A \notin B$.
ד. $A = \emptyset, B = \{\{\emptyset\}\}$. תשובה: $A \subseteq B\ \ A \notin B$.
ה. $A = \emptyset, B = \{x | x \subseteq \mathbb{N}\}$. תשובה: $A \subseteq B\ \ A \in B$.

3. הוכיחו שאם A, B, C קבוצות ומתקיים $A \subseteq B, B \subseteq C$ אז $A \subseteq C$.

הוכחה:

יהי $x \in A$. מכך ש $A \subseteq B$ נובע ש $x \in B$. עתה, מכך ש $B \subseteq C$ נובע ש $x \in C$. לכן $A \subseteq C$.

4. מצאו אילו יחסי הכלה יש בין הקבוצות הבאות: $\emptyset, \mathbb{Q}, \mathbb{N}, \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}$.

תשובה:

$$\emptyset \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

חלק ג – פעולות על קבוצות ודיאגרמת ון

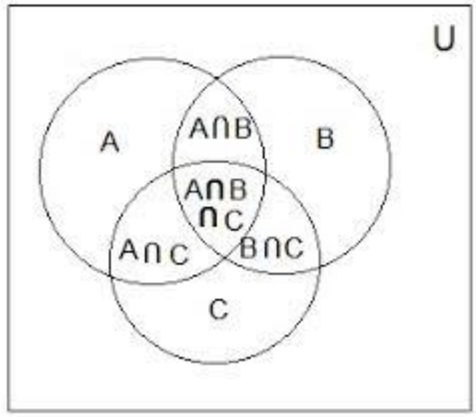
1. בשאלה זו A, B, C הן קבוצות. ציירו דיאגרמות ון מתאימות עבור:

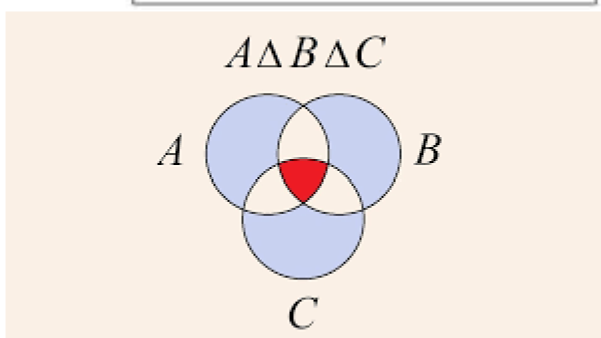
א. $A \cup B \cup C$
ב. $A \cap B \cap C$
ג. $A \cap (B \cup C)$
ד. $(A \cup B) \setminus C$
ה. $(A \Delta B) \cap C$

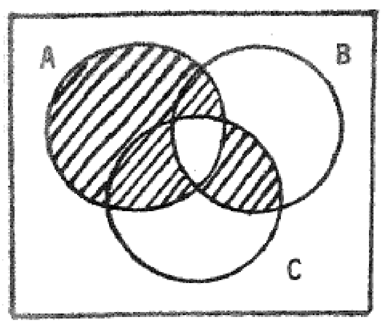
ו. $(A \cup B) \backslash (A \cap B)$

תשובה:

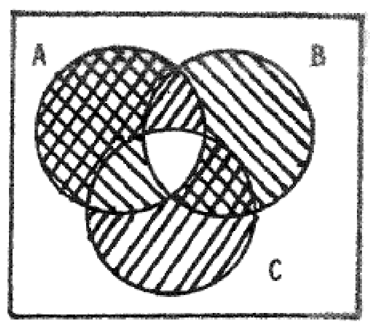
נצרף כאן כמה דיאגרמות:







$A\Delta(B\cap C)$



$(A\Delta B)\cap(A\Delta C)$

2. חשבו את $A \cap B, A \cup B, A \backslash B$ כאשר:

א. $\mathrm{A} = \{1,2,3\},\ B = \{2,3,6,7\}$

$A \cap B = \{2,3\}, \qquad A \cup B = \{1,2,3,6,7\}, \qquad A \backslash B = \{1\}$

ב. $\mathrm{A} = (1,2),\ B = [1,2]$

$A \cap B = (1,2), \qquad A \cup B = [1,2], \qquad A \backslash B = \emptyset$

ג. $\mathrm{A} = \mathbb{N},\ B = \emptyset$

$A \cap B = \emptyset, \qquad A \cup B = \mathbb{N}, \qquad A \backslash B = \mathbb{N}$

ד. $\mathrm{A} = [1,5],\ B = [2,6]$

$A \cap B = [2,5], \qquad A \cup B = [1,6], \qquad A \backslash B = [1,2)$

3. עבור קבוצות A, B הוכיחו:

א. $A \subseteq A \cup B$
הוכחה:
יהי $x \in A$. אז בפרט $x \in A$ או $x \in B$. לכן $x \in A \cup B$.
ב. $A \cap B \subseteq A$
הוכחה:
יהי $x \in A \cap B$. אז $x \in A$ וגם $x \in B$. לכן בפרט $x \in A$.
ג. $A\backslash B \subseteq A$
הוכחה:
יהי $x \in A\backslash B$. אז $x \in A$ וגם $x \notin B$. לכן בפרט $x \in A$.

חלק ד – שוויון קבוצות

1. הוכיחו שעבור קבוצות A, B, C מתקיים:

א. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
הוכחה:
$\subseteq$: יהי $x \in A \cup (B \cap C)$. אז $x \in A$ או ($x \in B$ וגם $x \in C$). לכן ($x \in A$ או $x \in B$) וגם ($x \in A$ או $x \in C$). כלומר $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
$\supseteq$: יהי $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. אז ($x \in A$ או $x \in B$) וגם ($x \in A$ או $x \in C$). בכל מקרה מתקיים $x \in A$ אחרת ($x \in B$ וגם $x \in C$). כלומר $x \in A \cup (B \cap C)$.
ב. $(A \cup B)\backslash(A \cap B) = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$
הוכחה:
$\subseteq$: יהי $x \in (A \cup B)\backslash(A \cap B)$. אז ($x \in A$ או $x \in B$) וגם $x \notin A \cap B$. כלומר x נמצא באחת מהקבוצות אבל לא בשתיהן בו זמנית. לכן ($x \in A$ וגם $x \notin B$) או ($x \in B$ וגם $x \notin A$). כלומר $x \in (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$.
$\supseteq$: יהי $x \in (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$. אז ($x \in A$ וגם $x \notin B$) או ($x \in B$ וגם $x \notin A$). אז x נמצא באחת מהקבוצות אבל לא בחיתוך. כלומר $x \in (A \cup B)\backslash(A \cap B)$.
ג. $A\backslash(B \cup C) = (A\backslash B) \cap (A\backslash C)$
הוכחה:
$\subseteq$: יהי $x \in A\backslash(B \cup C)$. אז $x \in A$ וגם $x \notin B \cup C$. כלומר $x \in A$ ולא ב B $x \in A$ ולא ב C.
כלומר $x \in (A\backslash B) \cap (A\backslash C)$.
$\supseteq$: יהי $x \in (A\backslash B) \cap (A\backslash C)$. אז ($x \in A$ וגם $x \notin B$) וגם ($x \in A$ וגם $x \notin C$). אז בכל מקרה $x \in A$ וגם לא ב B ולא ב C. כלומר $x \in A\backslash(B \cup C)$.

2. הוכיחו את השוויון הבא:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 0\} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

הוכחה:

$\subseteq$: יהי $x \in \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 0\}$. אז $x \in \mathbb{R}$ וגם $x \neq 0$ (אחרת אם $x = 0$ היה מתקיים $x^2 = 0$). כלומר $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

$\supseteq$: יהי $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. אז נחלק למקרים:

$x > 0$: אז נכפיל את האי שיוויון ב x. מאחר והוא חיובי זה לא משנה את האי שיוויון ונקבל $x^2 > 0$.

$x < 0$: אז נכפיל את האי שיוויון ב x. מאחר והוא שלילי זה הופך את האי שיוויון ונקבל $x^2 > 0$.

בכל מקרה קיבלנו את התנאי הדרוש. כלומר $x \in \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 0\}$.

3. כמה קבוצות ריקות קיימות? האם יתכן שיש יותר מקבוצה ריקה אחת?

תשובה:

על פי הגדרה, קבוצה נקבעת לפי אבריה. אם לשתי קבוצות יש בדיוק אותם איברים אז הן שוות. לכן יש רק קבוצה ריקה אחת.

חלק ה – משלים של קבוצה

בחלק זה מניחים שכל הקבוצות מוכלות בקבוצה U כלשהי, והמשלים נלקח ביחס לקבוצה U.

1. הוכיחו שלכל קבוצה מתקיים $(\mathrm{A}^c)^c = A$.

הוכחה:

יהי $x \in A$. זה שקול לכך ש $x \notin A^c$. זה שקול לכך ש $x \in (A^c)^c$. השקילויות נובעות מיידית מהגדרת המשלים.

2. הוכיחו שלכל שתי קבוצות מתקיים $\mathrm{A} \subseteq B$ אם ורק אם $\mathrm{B}^c \subseteq A^c$.

הוכחה:

$\Leftarrow$: נניח כי $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$. יהי $x \in B^c$ אז $x \notin B$ לכן $x \notin A$ כלומר $x \in A^c$.

$\Rightarrow$: אפשר להוכיח ישירות או להיעזר בכיוון הקודם שכבר הוכחנו. כלומר, נפעיל את הכיוון הקודם כאשר במקום A ניקח את B^c ובמקום B ניקח את A^c. אז נקבל כי

$$A = (A^c)^c \subseteq (B^c)^c = B$$

3. עבור קבוצות A, B כלשהן, הוכיחו את כללי דה-מורגן הבאים:

א. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

הוכחה:

$\subseteq$: יהי $x \in (A \cup B)^c$. אז $x \in U \setminus (A \cup B)$ כלומר $x \in U$ וגם $x \notin A$ וגם $x \notin B$. כלומר $x \in U \setminus A$ וגם $x \in U \setminus B$. סך הכל $x \in A^c \cap B^c$.

$\supseteq$: יהי $x \in A^c \cap B^c$. אז $x \in U \setminus A$ וגם $x \in U \setminus B$. אז בכל מקרה $x \in U$ ולא באף אחת מהקבוצות A או B. כלומר $x \in (A \cup B)^c$.

ב. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

הוכחה:

$\subseteq$: יהי $x \in (A \cap B)^c$. אז $x \in U \setminus (A \cap B)$ כלומר $x \in U$ וגם $x \notin A \cap B$. אז נחלק למקרים: $x \notin A$ ואז $x \in A^c$ או $x \in A$ ואז $x \notin B$ (כי הוא לא יכול להיות בשתי הקבוצות) ואז $x \in B^c$. כלומר $x \in A^c$ או $x \in B^c$. סך הכל $x \in A^c \cup B^c$.

$\supseteq$: יהי $x \in A^c \cup B^c$. אז $x \in U \setminus A$ או $x \in U \setminus B$. אז לא ייתכן כי $x \in U$ וגם x שייך לשתי הקבוצות. כלומר $x \in (A \cap B)^c$.

חלק ו – מכפלה קרטזית

1. חשבו את $\{1,2,3\} \times \{1,4,5\}$.

תשובה:

$$\{1,2,3\} \times \{1,4,5\} = \{(1,1),(1,4),(1,5),(2,1),(2,4),(2,5),(3,1),(3,4),(3,5)\}$$

2. תהיינה A, B קבוצות לא ריקות. הוכיחו שמתקיים $A \times B = B \times A$ אם ורק אם $\mathrm{A} = B$.

הוכחה:

$\Leftarrow$: נראה כי $A \subseteq B$: יהי $x \in A$. ניקח $y \in B$ כלשהו (כי היא לא ריקה) ונקבל $(x,y) \in A \times B$ אבל מהשיוויון שמניחים נקבל $(x,y) \in B \times A$ כלומר $x \in B$. ההכלה ההפוכחה מתקבלת באופן דומה.

$\Rightarrow$: מיידי.

3. הוכיחו או הפריכו:

א. לכל A, B, C מתקיים $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

הטענה נכונה. הוכחה:

$\subseteq$: ניקח $a \in (A \cup B) \times C$. אז מהגדרת המכפלה הקרטזית, קיימים $x \in A \cup B$ ו $y \in C$ כך ש $a = (x,y)$. כעת אם $x \in A$ אז $a \in A \times C$ ואם $x \in B$ אז $a \in B \times C$. בכל מקרה מקבלים $a \in (A \times C) \cup (B \times C)$.

$\supseteq$: ניקח $a \in (A \times C) \cup (B \times C)$. אז $a \in A \times C$ או $a \in B \times C$. במקרה הראשון נקבל כי קיימים $x \in A \subseteq A \cup B, y \in C$ כך ש $a = (x,y)$ כלומר $a \in (A \cup B) \times C$. במקרה השני נקבל כי קיימים $x \in B \subseteq A \cup B, y \in C$ כך ש $a = (x,y)$ כלומר $a \in (A \cup B) \times C$.

ב. לכל A, B, C, D מתקיים $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$.

הטענה אינה נכונה. ניתן דוגמא נגדית:

ניקח

$$A = C = \{1\}, \quad B = D = \{2\}$$

אז

$$(A \cup B) \times (C \cup D) = \{1,2\} \times \{1,2\}$$
$$= \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$$

ואילו

$$(A \times C) \cup (B \times D) = \{(1,1)\} \cup \{(2,2)\} = \{(1,1), (2,2)\}$$

נסדר את n האנשים בשורה - $n!$ אפשרויות. נסגור למעגל ונחלק בכפילויות לכן $\frac{n!}{n}=(n-1)!$

1. נגדיר גוש – הבנות + יוגב, ומאידך יש את כל השאר.הגוש בגודל 5 וגם השאר בגודל 5. למעשה נרצה לסדר סה"כ 6 אלמנטים במעגל וזה $5!$ אפשרויות. נבדוק את הסידורים בתוך הגוש עצמו: לבנות יש $4!$ סידורים וליוגב 2 אפשרויות, סה"כ סיודרים אפשריים לגוש $4!\cdot 2$ סה"כ $5!\cdot 2\cdot 4!$
2. בדיוק בחצי מהסידורים דני יהיה מימין לדנה ולכן $\frac{n!}{2}$.
3. נבחר ראשית מקום לשלושת המיוחדים - $\binom{10}{3}$. כעת נסדר את השאר בשורה - $7!$. כעת נשים את דני במקום הכי ימני מבין השלושה שבחרנו עבורם. נסדר את דנה ודינה - $2!$. סה"כ $\binom{10}{3}\cdot 7!\cdot 2!$.
4. נתייחס ל- $\{1,2,3\}$ כגוש, נסדר $\mathrm{n}-3$ איברים + הגוש סה"כ $(n-2)!$ אפשרויות. נסדר את הגוש $3!$ סה"כ $(n-2)!\,3!$.

פונקציות – פתרונות

חלק א' – הפונקציה לבדה

.1

א. תמונה הפונקציה היא $\mathbb{N}\backslash\{1\}$. נראה זאת:
מצד אחד, כל איבר $b \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$. מתקבל ע״י האיבר $b-1 \in \mathbb{N}$
$(f(b-1) = b-1+1 = b)$, ולכן $\mathbb{N}\backslash\{1\}$. מוכלת בתמונת הפונקציה. מצד שני, כל איבר $a \in \mathbb{N}$ נשלח לאיבר $a+1 \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ $(f(a) = a+1)$, ולכן $\mathbb{N}$ מכילה את תמונת הפונקציה.
הפונקציה חח״ע שכן שני איברים שונים בתחום $x \neq y$ נשלחים לאיברים שונים, שכן $x+1 \neq y+1$ ולכן

$$f(x) = x+1 \neq y+1 = f(y)$$

הפונקציה איננה על כי התמונה שונה מהטווח.

ב. התחום והטווח הם כל השלמים. תמונת הפונקציה היא כל השלמים הזוגיים. הפונקציה חח"ע ולא על.

ג. תמונת הפונקציה היא קבוצת כל הזכרים בעלי צאצאים.
אינה חח"ע (יכולים להיות מספר ילדים לאותו אב).
אינה על (כי הטווח מכיל גם נקבות וזכרים ללא צאצאים).

ד. תחום כל בני האדם. טווח כל השלמים. תמונת הפונקציה היא מספרים שלמים בעלי 9 ספרות (או פחות במקרים מיוחדים) כאשר הספרה הימנית הינה פונקציה של שאר הספרות (לקריאה נוספת [לחצו כאן]). הפונקציה חח"ע ולא על (כי למשל 0 הוא לא תעודת זהות ולכל שני אנשים שונים יש 2 תעודות זהות שונות).

ה. תחום: X. טווח: X.
תמונה: X. [כי לכל איבר בטווח $x \in X$ קיים מקור – הרי x עצמו, שכן $Id(x) = x$.]
היא חח״ע כי איברים שונים בתחום $x \neq y$ נשלחים לאיברים שונים בטווח $x \neq y$.
היא על כי התמונה היא הטווח כולו.

ו. תחום: $\mathbb{Q}$. טווח: $\{0,1\}$.
תמונת הפונקציה תלויה ב- X: אם $X = \emptyset$ אז התמונה היא $\{0\}$, אם $X = \mathbb{Q}$ תמונה הפונקציה היא $\{1\}$, ובכל מקרה אחר היא $\{0,1\}$. [הכל נקבע על פי האם יש $a \in \mathbb{Q}$ שנמצא ב- X והאם יש $a \in \mathbb{Q}$ שלא נמצא ב- X.]

ז. תמונת הפונקציה היא $\{b_0\}$.
הפונקציה חח״ע אמ״מ A סינגלטון. [כי אם יש רק איבר אחד אז תנאי החח״ע מתקיים באופן מיידי, אחרת התנאי לא מתקיים, כי ניקח שני איברים כלשהם (שונים) והם ישלחו לאותו איבר.]
הפונקציה על אמ״מ $B = \{b_0\}$, כלומר אמ״מ B סינגלטון.

.2 פונקציה ראשונה: $f(1) = 1, f(2) = 1, f(3) = 1$.
פונקציה שנייה: $f(1) = 1, f(2) = 1, f(3) = 2$.
פונקציה שלישית: $f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 1$.
פונקציה רביעית: $f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 2$.
פונקציה חמישית: $f(1) = 2, f(2) = 1, f(3) = 1$.
פונקציה שישית: $f(1) = 2, f(2) = 1, f(3) = 2$.
פונקציה שביעית: $f(1) = 2, f(2) = 2, f(3) = 1$.
פונקציה שמינית: $f(1) = 2, f(2) = 2, f(3) = 2$.
אף אחת לא חח"ע. הראשונה והשמינית לא על וכל השאר כן על.

.3

א. הפונקציה מסעיף 1א׳ הנה דוגמה מתאימה.

ב. נגדיר את הפונקציה באופן הבא:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ x-1, & else\end{cases}$$

צריך להוכיח שהיא על ואינה חח״ע. מאחר וכל איבר $b\in\mathbb{N}$ מתקבל ע״י $b+1\in\mathbb{N}$, היא על. מאחר ו- $f(0)=f(1)$, היא איננה חח״ע.

4.

א. נראה $f[A\cup B]=f[A]\cup f[B]$ ע״י הכלה דו-כיוונית.

$f[A\cup B]\subseteq f[A]\cup f[B]$: יהי $y\in f[A\cup B]$. אז קיים $x\in A\cup B$ כך ש- $f(x)=y$. כלומר קיים $x\in A$ או $x\in B$ כך ש- $f(x)=y$. נפריד למקרים: אם $x\in A$, אז $y\in f[A]$, ולכן $y\in f[A]\cup f[B]$. אם $x\in B$, אז $y\in f[B]$, ולכן $y\in f[A]\cup f[B]$. בכל מקרה קיבלנו את ההכלה שרצינו ולכן היא מתקיימת.

$f[A]\cup f[B]\subseteq f[A\cup B]$: יהי $y\in f[A]\cup f[B]$. כלומר $y\in f[A]$ או $y\in f[B]$. נפריד למקרים: אם $y\in f[A]$, אז קיים $x\in A$ כך ש- $f(x)=y$, כלומר קיים $x\in A\cup B$ כך ש $f(x)=y$, ולכן $y\in f[A\cup B]$. אם $y\in f[B]$, אז קיים $x\in B$ כך ש- $f(x)=y$, כלומר קיים $x\in A\cup B$ כך ש $f(x)=y$, ולכן $y\in f[A\cup B]$. בכל מקרה קיבלנו את ההכלה שרצינו ולכן היא מתקיימת.

ב. $f[A\cap B]\subseteq f[A]\cap f[B]$: יהי $y\in f[A\cap B]$. אז קיים $x\in A\cap B$ כך ש- $f(x)=y$. כלומר קיים $x\in A$ וגם $x\in B$ כך ש- $f(x)=y$. $x\in A$ לכן $y\in f[A]$. $x\in B$ לכן $y\in f[B]$. סך הכל $y\in f[A]\cap f[B]$.

5.

א. נראה $f^{-1}[A\cup B]=f^{-1}[A]\cup f^{-1}[B]$ ע״י הכלה דו-כיוונית.

$f^{-1}[A\cup B]\subseteq f^{-1}[A]\cup f^{-1}[B]$: יהי $x\in f^{-1}[A\cup B]$. אז קיים $y\in A\cup B$ כך ש- $f(x)=y$. כלומר קיים $y\in A$ או $y\in B$ כך ש- $f(x)=y$. נפריד למקרים: אם $y\in A$, אז $x\in f^{-1}[A]$, ולכן $x\in f^{-1}[A]\cup f^{-1}[B]$. אם $y\in B$, אז $x\in f^{-1}[B]$, ולכן $x\in f^{-1}[A]\cup f^{-1}[B]$. בכל מקרה קיבלנו את ההכלה שרצינו ולכן היא מתקיימת.

$f^{-1}[A]\cup f^{-1}[B]\subseteq f^{-1}[A\cup B]$: יהי $x\in f^{-1}[A]\cup f^{-1}[B]$. כלומר $x\in f^{-1}[A]$ או $x\in f^{-1}[B]$. נפריד למקרים: אם $x\in f^{-1}[A]$, אז קיים $y\in A$ כך ש- $f(x)=y$, כלומר קיים $y\in A\cup B$ כך ש $f(x)=y$, ולכן $x\in f^{-1}[A\cup B]$. אם $x\in f^{-1}[B]$, אז קיים $y\in B$ כך ש- $f(x)=y$, כלומר קיים $y\in A\cup B$ כך ש $f(x)=y$, ולכן $x\in f^{-1}[A\cup B]$. בכל מקרה קיבלנו את ההכלה שרצינו ולכן היא מתקיימת.

ב. נראה $f^{-1}[A\cap B]=f^{-1}[A]\cap f^{-1}[B]$ ע״י הכלה דו-כיוונית.

$f^{-1}[A\cap B]\subseteq f^{-1}[A]\cap f^{-1}[B]$: יהי $x\in f^{-1}[A\cap B]$. אז קיים $y\in A\cap B$ כך ש- $f(x)=y$. כלומר קיים $y\in A$ וגם $y\in B$ כך ש- $f(x)=y$. $y\in A$, אז $x\in f^{-1}[A]$. $y\in B$, אז $x\in f^{-1}[B]$. לכן $x\in f^{-1}[A]\cap f^{-1}[B]$.

$f^{-1}[A]\cap f^{-1}[B]\subseteq f^{-1}[A\cap B]$: יהי $x\in f^{-1}[A]\cap f^{-1}[B]$. כלומר $x\in f^{-1}[A]$ וגם $x\in f^{-1}[B]$. $x\in f^{-1}[A]$, אז קיים $y\in A$ כך ש- $f(x)=y$. $x\in f^{-1}[B]$, אז קיים $y\in B$ כך ש- $f(x)=y$. סך הכל קיבלנו שקיים $y\in A\cup B$ כך ש $f(x)=y$, ולכן $x\in f^{-1}[A\cap B]$.

6.

א. 151

ב. אין מספר כזה (אם ב- B יש יותר מ- 151 איברים, אז יש פונקציה חח״ע אליו מ- A)

ג. 1 (הפונקציה הקבועה על האיבר הבודד ב- B היא על, ואם היא ריקה אז לא קיימת פונקציה כלל)

ד. 151

חלק ב' – פעולות בין פונקציות

.1

א. יהיו $x,y\in A$ שונים, כלומר $x\neq y$. מאחר ו- f חח״ע, מתקיים $f(x)\neq f(y)$. מאחר ו- g חח״ע, $g\big(f(x)\big)\neq g\big(f(y)\big)$. לכן $(g\circ f)(x)\neq(g\circ f)(y)$.
כלומר לכל $x,y\in A$ שונים מתקיים $(g\circ f)(x)\neq(g\circ f)(y)$, לכן $g\circ f$ חח״ע.

ב. יהי $c\in C$. מאחר ו- g על, קיים איבר $b\in B$ כך ש- $g(b)=c$. מאחר ו- f על, קיים איבר $a\in A$ כך ש- $f(a)=b$. לכן, $(g\circ f)(a)=g\big(f(a)\big)=g(b)=c$.
כלומר, לכל $c\in C$ קיים $a\in A$ כך ש- $(g\circ f)(a)=c$, לכן $g\circ f$ על.

.2 $(g\circ f)(x)=2x^2$. $f\circ g(x)=(2x)^2=4x^2$.

.3 $f\circ h(x)=f\big(h(x)\big)=f(-5x+1)=(-5x+1)^2+2=25x^2-10x+3$.

.4

א. אינה חח״ע, כי $f(1)=2=f(-1)$. אינה על, כי לכל $n\in\mathbb{Z}$ מתקיים $f(n)=n^2+1\neq 3$ אחרת $\sqrt{2}\in\mathbb{Z}$ בסתירה. בפרט $f(n)\neq 3$, כלומר ל- $3\in\mathbb{N}$ אין מקור. היא אינה הפיכה כי היא אינה חח״ע ועל.

ב. היא לא חח"ע כי נותנת אותו ערך עבור 0 ועבור 1. לא על כי 2 למשל לא יכול להתקבל. בפרט לא הפיכה.

ג. נראה שהפונקציה $g:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ הפועלת על פי $g(y)=\frac{5}{17}(y+2)$ היא ההופכית של f:
לכל $y\in\mathbb{Q}$ מתקיים:

$$f\circ g(y)=f\left(\frac{5}{17}(y+2)\right)=\frac{17}{5}\left(\frac{5}{17}(y+2)\right)-2=y$$

לכל $x\in\mathbb{Q}$ מתקיים:

$$g\circ f(x)=g\left(\frac{17}{5}x-2\right)=\frac{5}{17}\left(\left(\frac{17}{5}x-2\right)+2\right)=x$$

לכן g ההופכית של f. בפרט, f הפיכה, ולכן היא חח״ע ועל.
[כיצד מצאנו את ההופכית? אנו יודעים שההופכית צריכה לקיים $f\big(g(y)\big)=y$, ואז על ידי בידוד $g(y)$ ניתן למצוא פונקציה g פוטנציאלית. עדיין צריך לוודא שהיא באמת הופכית!]

ד. אינה חח״ע, כי $f\left(\frac{7}{10}\right)=\frac{4}{5}=f\left(\frac{3}{5}\right)$. לכן היא גם אינה הפיכה. עם זאת, נראה שהיא על. [היה מקום להזהיר שזה קצת קשה, כפי שתראו. אם יש לכם הוכחה פשוטה יותר אשמח לשמוע.]
יהי $s\in\mathbb{Q}_+$. עלינו להראות שיש לו מקור. תחילה נרשום אותו כ- $s=\frac{a}{b}$ כאשר $a,b\in\mathbb{N}$ כך ש- $b\neq 1$ (למה ניתן לרשום אותו כך?). נשאיר לסוף להראות שלשני המספרים $ab-1,b^2\in\mathbb{N}$ אין גורם משותף מעל 1. בהינתן זאת,

$$\frac{ab-1}{b^2}\in\mathbb{Q}_+$$

שבר מצומצם, ולכן,

$$f\left(\frac{ab-1}{b^2}\right)=\frac{ab-1+1}{b^2}=\frac{ab}{b^2}=\frac{a}{b}=s$$

בפרט ל- s יש מקור.
נראה כעת למספרים $ab-1,b^2\in\mathbb{N}$ אין גורם משותף מעל 1. נניח בשלילה שיש כזה, אז בפרט יש כזה ראשוני – נסמן אותו ב- p. אז הוא מחלק גם את b^2, אך מכך שהוא ראשוני הוא מחלק

את b, ולכן גם את ab. כמו כן, הוא מחלק את $ab-1$. לכן הוא מחלק את ההפרש בינם, כלומר את 1, וזו סתירה.

ה. אשאיר לכם להראות ש- $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\cup\{0\}$ הפועלת על פי

$$g(n)=\begin{cases} n, & \exists k\in\mathbb{N}\cup\{0\}.n=2k+1 \\ n-2, & \exists k\in\mathbb{N}\cup\{0\}.n=2k \end{cases}$$

הנה ההופכית של f. בפרט, f הפיכה, ולכן היא חח״ע ועל.

[הרעיון הוא ש- f מוסיפה 2 לזוגיים בלבד, לכן ההופכית תחסיר 2 לזוגיים בלבד.]

5. ייתכן כי $g\circ f$ היא הזהות אם למשל f תהיה הזהות ו g תשלח כל מספר למספר זהה לו ו 4 למשל ל 1.
לא ייתכן כי $f\circ g$ תהיה זהות כי g לא יכולה להיות חח"ע.

6. $$\chi_{A\cap B}(x)=\begin{cases}1, & x\in A\cap B\\ 0, & x\notin A\cap B\end{cases}=\begin{cases}1, & x\in A\\ 0, & x\notin A\end{cases}\cdot\begin{cases}1, & x\in B\\ 0, & x\notin B\end{cases}=\chi_A\cdot\chi_B(x)$$

7.

$$\chi_{A\cup B}=\chi_A+\chi_B-\chi_A\cdot\chi_B,\qquad \chi_{A\setminus B}=\chi_A-\chi_A\cdot\chi_B,\qquad \chi_{A\triangle B}=\chi_A+\chi_B-2\chi_A\cdot\chi_B$$

אי שוויונות – פתרונות

חלק א – אי שוויונות ממעלה ראשונה

1. $x < 3$.
2. $x \leq -2$.
3. $(0,2)$.
4. $x < 10$.

חלק ב – אי שוויונות ממעלה שנייה

1. פרבולה מחייכת שמשיקה לציר ה x ב 1.
2. פרבולה עצובה הנמצאת מתחת לציר האופקי.
3.
   - $x \geq 0$.
   - $-4 \leq x \leq 4$.
   - $\emptyset$.
   - $x \in \mathbb{R}$.
4. נתבונן בפונקציה:

$$f(x) = (m^2 - 5m)x^2 - (m-5)x - 1$$

   - עבור אילו ערכי m הפונקציה הינה קו ישר המקביל לציר x? $m = 5$.
   - מהו הערך של m עבורה הפונקציה הינה פרבולה המשיקה לציר ה x בנקודה יחידה? קורה כאשר $\Delta = 0$ כלומר כאשר $m = 1$.
5. $x > 2$ או < -2.
6. $x \leq -3$ או $x \geq -2$.
7. $x \in \mathbb{R}$.
8. $-4 \leq x \leq 2$.
9. $x = 3$.
10. $x \neq 3$.
11. הפתרונות לפי מספור הסעיפים:

1.) $x \leq -7$ or $x \geq 5$ - in interval notation: $(-\infty, -7] \cup [5, \infty)$ 2.) There is no solution

3.) $-\frac{1}{2} < x < 4$ - in interval notation: $\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$ 4.) $-8 \leq x \leq 2$ - in interval notation: $[-8, 2]$

5.) $x = 7$ 6.) $x \leq 5-\sqrt{26}$ or $x \geq 5+\sqrt{26}$ - in interval notation: $\left(-\infty, 5-\sqrt{26}\right] \cup \left[5+\sqrt{26}, \infty\right)$

7.) $\mathbb{R}$ (all numbers are solution)

חלק ג – אי שוויונות רציונליים

1. $-4 < x < 4, x \neq 1$
2. $x < -4$ או $x \geq 1.5$.

3. $x \le -2$ או $0 < x \le 4$.
4. $x \in (-\infty, -4) \cup [-2, -1] \cup (4, \infty)$
5. $-5 < x < 3, x \ne 2$
6. תחילה, נחסיר משני אגפי האי שוויון את u

$$0 \le \frac{4}{u-3} - u = \frac{-u^2+3u+4}{u-3} = \frac{-(u^2-3u-4)}{u-3}$$

הנקודה $u = 3$ הינה נקודה בעייתית. עבור $u \ne 3$ המונה מתאפס בנקודות $u = 4, -1$ (ניתן לבדוק זאת על ידי נוסחא לשורשי פרבולה). כעת, יש לנו ארבעה תחומים שבהם עלינו להציב ערכים באי שוויון על מנת לדעת את הסימן:

עבור $u < -1$ מציבים ורואים כי הסימן הינו +

עבור $-1 < u < 3$ מציבים ורואים כי הסימן הינו -

עבור $3 < u < 4$ מציבים ורואים כי הסימן הינו +

עבור $u > 4$ מציבים ורואים כי הסימן הינו -

ולכן סה"כ קבוצת הפתרונות $u \in (-\infty, -1] \cup (3,4]$.

7. $t \in [-\infty, 2) \cup [6, \infty)$
8. $x \in (-\infty, -3] \cup (2,3)$.
9. פתרון

1.) $a < 0$ or $a > 1$ - in interval notation: $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$

2.) $-2 \le x < 6$ - in interval notation: $[-2, 6)$

3.) $2 < x \le 3$ - in interval notation: $(2, 3]$

4.) $b \le \frac{17}{9}$ or $b > \frac{5}{2}$ - in interval notation: $\left(-\infty, \frac{17}{9}\right] \cup \left(\frac{5}{2}, \infty\right)$

5.) $0 < x \le \frac{1}{4}$ - in interval notation: $\left(0, \frac{1}{4}\right]$

6.) $x > -6$ - in interval notation: $(-6, \infty)$

7.) $1 < p \le \frac{11}{3}$ - in interval notation: $\left(1, \frac{11}{3}\right]$

8.) $m < -3$ or $m \ge -1$ - in interval notation: $(-\infty, -3) \cup [-1, \infty)$

חלק ד – אי שוויונות עם ערך מוחלט

1. $x = -2,7$.
2. $t = -\frac{19}{3}, 7$.
3. $y = \frac{9}{5}, \frac{7}{5}$
4. $x = 0, -2$
5. $x = 4, -\frac{5}{3}$

6. $-\frac{1}{3} \leq m \leq -\frac{1}{9}$
7. $4 \geq z \geq -1$
8. $t \geq -\frac{7}{6}$ או $t \leq -\frac{13}{6}$.
9. $y > 2$ או $y < -\frac{4}{3}$.
10.
    a. $\emptyset$.
    b. $x = 9$.
    c. $x \in \mathbb{R}$.
    d. $x \neq 3$.

11.
    a. $\emptyset$.
    b. $x \in \mathbb{R}$.

12. $x > 4$ או $x < -1$.
13. $x = 2, -1$
14. $-6 < x < 1$
15. $x \geq \frac{8}{3}$ או $x \leq -4$.
16. $x \in \left(-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right) \backslash \{-1\}$
17. $x \in \mathbb{R}$.
18. $x > 4$ או $x < -2$.
19. הוכיחו את אי שוויון המשולש ההפוך:

לכל $x, y \in \mathbb{R}$ מתקיים $\big||a| - |b|\big| \leq |a + b|$.

מתי מתקיים שיוויון?

נראה כי $-|a + b| \leq |a| - |b| \leq |a + b|$. נשתמש באי שוויון המשולש:

$$|x+y| \leq |x|+|y|$$

נציב:

$$x = a-b$$
$$y = b$$

ונקבל:

$$|a-b+b| \leq |a-b|+|b|$$
$$|a| \leq |a-b|+|b|$$
$$|a|-|b| \leq |a-b|$$

עכשיו נציב באי שוויון המשולש הרגיל:

$$x = b-a$$
$$y = a$$

ונקבל:

$$|b-a+a| \leq |b-a|+|a|$$
$$|b| \leq |a-b|+|a|$$
$$-|a-b| \leq |a|-|b|$$

נאחד את אי השוויונים:

$$-|a-b| \leq |a|-|b| \leq |a-b|$$

שוויון מתקיים כאשר הם בעלי אותו סימן.

20. הוכיחו את אי שוויון הממוצעים (הגיאומטרי-הרמוני):
לכל $x,y\geq 0$ מתקיים $\sqrt{xy}\geq\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$.
מתי מתקיים שיוויון?
פתרון:
נכפיל באלכסון (מותר כי הכל חיובי) ונקבל

$$\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{2}\geq\frac{1}{\sqrt{xy}}=\sqrt{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}}$$

סך הכל קיבלנו כי האי שוויון הדרוש שקול לאי שוויון:

$$\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{2}\geq\sqrt{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}}$$

וזהו אי שוויון הממוצעים (החשבוני-גיאומטרי) ולכן נכון. שוויון מתקיים כאשר $\frac{1}{x}=\frac{1}{y}$ כלומר כאשר $x=y$.

21. נניח בשלילה כי $a\neq L$. כלומר $a-L\neq 0$. זה שקול לכך ש $|a-L|\neq 0$. נסמן

$$b\coloneqq|a-L|>0$$

אז בפרט עבור $\varepsilon=b$ (או עבור כל ε קטן יותר) נקבל כי

$$|a-L|\nless\varepsilon$$

בסתירה לטענה. לכן $a=L$.

פונקציות אלמנטריות – פתרונות

חלק א – אי שוויונות מעריכיים

.1

א. $x \neq 1.5$.

ב. $0 < x < 2$.

ג. $x > 1$.

ד. $x < 3$.

ה. $x < 1$.

ו. $-1 < x < 3$.

ז. $x > 1$.

ח. $-5 < x < -\frac{3}{4}$

חלק ב – לוגריתמים

1. $x = 2$.
2. $\sqrt[3]{30}$
3.

א. נתחיל באגף ימין:

$$\log_a x - \log_a y = \log_a x + (-1) \cdot \log_a y$$
$$= \log_a x + \log_a y^{-1}$$
$$= \log_a x + \log_a \left(\frac{1}{y}\right) = \log_a \left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = \log_a \left(\frac{x}{y}\right)$$

ב. נתחיל באגף שמאל ונעזר בחוק החלפת בסיס:

$$\log_{a^b} x = \frac{\log_a x}{\log_a a^b} = \frac{\log_a x}{b \log_a a} = \frac{\log_a x}{b \cdot 1} = \frac{1}{b} \log_a x$$

חלק ג – אי שוויונות לוגריתמים

1. הוכיחו ש $\log_2(10) < \frac{10}{3}$:

נכפיל ב 3 את האי שוויון ונעזר בכך ש $\log_2 2^{10} = 10$:

$$3 \log_2 10 < \log_2 2^{10}$$
$$\log_2 10^3 < \log_2 1024$$
$$\log_2 1000 < \log_2 1024$$

וזה נכון.

.2

א. הוכיחו ש $\log_2(3) > \frac{3}{2}$:

נכפיל ב 2 את האי שוויון ונעזר בכך ש $\log_2 2^3 = 3$:

$$2 \log_2 3 > \log_2 2^3$$
$$\log_2 9 > \log_2 8$$

וזה נכון.

ב. מה יותר גדול: $\log_2(3)$ או $\log_3(4)$?

$\log_2 3$. כי מראים כי $\log_3 4 < \frac{3}{2}$ ונעזרים ב א.:

נכפיל ב 2 את האי שוויון ונעזר בכך ש $\log_3 3^3 = 3$:

$$2\log_3 4 < \log_3 3^3$$
$$\log_3 16 < \log_3 27$$

וזה נכון.

3. מה יותר גדול: $\log_2(3) + \log_3(4)$ או $2\sqrt{2}$?

נשים לב כי $\log_2 3 \cdot \log_3 4 = 2$ לכן

$$\log_2(3) + \log_3(4) - 2\sqrt{2} = \log_2(3) + \log_3(4) - 2\sqrt{\log_2(3)\cdot\log_3(4)}$$
$$= (\log_2(3) - \log_3(4))^2 \geq 0$$

כלומר

$$\log_2(3) + \log_3(4) \geq 2\sqrt{2}$$

4. הוכיחו ש $\log_{81}(x) + \log_x(3) \geq 1$ לכל $x > 1$.

נשים לב כי $\log_{81}(x)\cdot\log_x(3) = \log_{81} 3 = \frac{1}{4}$

לכן אם נכפיל את האי שויוויון הדרוש ב $\log_x 3$ נקבל:

$$\frac{1}{4} + (\log_x 3)^2 \geq \log_x 3$$
$$\frac{1}{4} + (\log_x 3)^2 - \log_x 3 \geq 0$$
$$\left(\frac{1}{2} - (\log_x 3)\right)^2 \geq 0$$

וזה נכון.

חלק ד – טריגונומטריה

1. בטאו את $y = \sin(2\alpha)$ באמצעות $x = \sin(\alpha) + \cos(\alpha)$:

$$y = \sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = (sin\alpha + cos\alpha)^2 - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = x^2 - 1$$

2. הוכיחו את הנוסחאות לחצי זווית:

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$
$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

מהנוסחא לקוסינוס של זוית כפולה מקבלים

$$\cos(x) = \cos\left(2\frac{x}{2}\right) = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} - 2\sin^2\frac{x}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$$

כלומר

$$\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$$

נבודד את סינוס ונוציא שורש ונקבל את השוויון המבוקש. הנוסחא לקוסינוס של חצי זוית מוכחת באופן דומה.

3. פתרו את המשוואה

$$\cos^2(x) - \sin^2(x) = \sin(x)$$

פתרון:

המשוואה שקולה ל

$$1-2\sin^2(x)=\sin(x)$$

נציב $t=\sin x$ ונפתור את המשוואה הריבועית. נקבל $t=-1,\frac{1}{2}$. לכן $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k$ עבור $k\in\mathbb{Z}$.

4. הוכיחו את הנוסחה ל tan של סכום זוויות:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

נעזר בנוסחאות לסכום זוויות מהשיעור:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$

$$=\frac{\sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)}\cdot\frac{\frac{1}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}}{\frac{1}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}}$$

$$\frac{\sin(\alpha)/\cos(\alpha)+\sin(\beta)/\cos(\beta)}{1-\sin(\alpha)\sin(\beta)/\cos(\alpha)\cos(\beta)}=\frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

5. נניח שמתקיים $(2+\tan(\alpha))(2+\tan(\beta))=5$. מצאו את $\tan(\alpha+\beta)$.

פתרון:

$$(2+\tan(\alpha))(2+\tan(\beta))=5$$

$$4+\tan(\alpha)\tan(\beta)+2(\tan(\alpha)+\tan(\beta))=5$$

$$2(\tan(\alpha)+\tan(\beta))=1-\tan(\alpha)\tan(\beta)$$

$$\frac{1}{2}=\frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}=\tan(\alpha+\beta)$$

6. בטאו את $y=\cos(2\alpha)$ באמצעות $x=\tan(\alpha)$.

$$y=\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

$$=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{1}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}$$

$$=\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{1-x^2}{1+x^2}$$

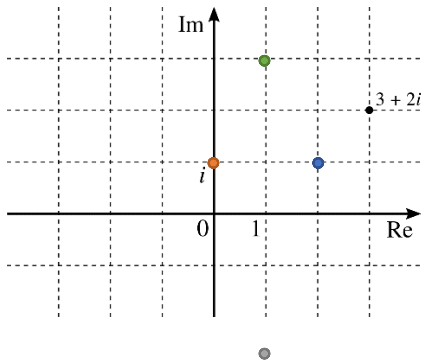
מספרים מרוכבים – פתרונות

חלק א – הגדרת המרוכבים ופעולות בסיסיות

1. חשבו:
   א. -1
   ב. $-i$
   ג. 1
   ד. $i^{21}=i\cdot i^{20}=i\cdot(i^4)^5=i$
2. מאחר והחזקות של i הן מחזוריות ממחזור 4, נחלק את n ב 4 עם שארית: $n=4t+s$ כאשר $s\in\{0,1,2,3\}$.
   עכשיו:
   $$i^n=i^{4t+s}=i^s\cdot(i^4)^t=i^s$$
3. חשבו
   א. $i^{-1}=\frac{1}{i}=\frac{1}{i}\cdot\frac{-i}{-i}=-\frac{i}{|i|}=-i$
   ב. $i^{-2}=\frac{1}{i^2}=-1$
   ג. $i^{-3}=\frac{1}{i^3}=\frac{1}{-i}=-i^{-1}=i$
   ד. $i^{-4}=\frac{1}{i^4}=1$
   ה. $i^{-24}=(i^{-4})^6=1$
4. יהיו $z_1=5+6i$, $z_2=3-2i$ ו $z_3=1+3i$. מצאו:
   א. $7+i$
   ב. $21+14i$
   ג. $-2-5i$
   ד. $27+8i$
   ה. $2.3-0.9i$
   ו. $-\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i$
5. מצאו את הפתרונות של:
   א. $x_{1,2}=\pm\sqrt{2}i$
   ב. $x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-160}}{2}=1\pm\sqrt{39}i$
   ג. $x_{1,2}=\pm4i$
   ד. $x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-80}}{2}=2\pm4i$
   ה. $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$
   ו. $x^2=\frac{-5\pm\sqrt{25-24}}{2}=-\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}=-2,-3$
   לכן
   $$x_{1,2}=\pm\sqrt{2}i,x_{3,4}=\pm\sqrt{3}i$$

חלק ב – מישור גאוס וצורה פולרית

1. ציירו את המספרים הבאים במישור המרוכב:



א. $2+i$ בכחול

ב. i בכתום

ג. $1-3i$ באפור והצמוד המרוכב שלו בירוק.

2. רשמו בצורה פולרית את המספרים הבאים:

א. $\left(3,\frac{\pi}{2}\right)$

ב. $\left(\sqrt{8},\frac{\pi}{4}\right)$

ג. $\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$

ד. $\left(5,\arctan\left(-\frac{4}{3}\right)+\pi\right)$

ה. $\left(10,-\frac{\pi}{2}\right)$

ו. $\left(\sqrt{200},-\frac{3\pi}{4}\right)$

3. פשטו:

א. $32\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-16\sqrt{2}+i16\sqrt{2}$

ב. $3(-1+i\cdot 0)=-3$

ג. $\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1+i$

4. רשמו בצורה קרטזית:

א. $3e^{\frac{i20\pi}{7}}=3e^{\frac{i6\pi}{7}}=3\cos\frac{6\pi}{7}+i3\sin\frac{6\pi}{7}$

ב. $1e^{i4\pi}=1$

ג. $2e^{-\frac{i\pi}{6}}=2\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}-i$

ד. $1e^{i\pi}=-1$

ה. $1e^{i0}=1$

ו. $2e^{\frac{i\pi}{2}}=2i$

חלק ג – חזקות ושורשים

1. חשבו:

א. $(2+2i)^4 = \left(\sqrt{8}\right)^4 e^{\frac{i4\pi}{4}} = -64$

ב. $\left(\sqrt{3}-i\right)^5 = \left(\sqrt{4}\right)^5 e^{-\frac{i5\pi}{6}} = 32e^{\frac{7\pi i}{6}} = 32\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = -16\sqrt{3}-16i$

ג.

$$\sqrt[4]{16+16i} = \left\{\sqrt[4]{\sqrt{512}e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{4}}{4}+\frac{2\pi k}{4}\right)}} \mid k\in\{0,1,2,3\}\right\}$$

$$= \left\{\sqrt[8]{512}e^{i\left(\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{2}\right)} \mid k\in\{0,1,2,3\}\right\}$$

ד.

$$\sqrt[5]{-32} = \left\{\sqrt[5]{32}e^{i\left(\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi k}{5}\right)} \mid k\in\{0,1,2,3,4\}\right\}$$

$$= \left\{2e^{i\left(\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi k}{5}\right)} \mid k\in\{0,1,2,3,4\}\right\}$$

2. פתרו את המשוואות הבאות:

א. נשתמש בנוסחת השורשים:

$$z_{1,2} = \frac{-i\sqrt{32} \pm \sqrt{-32+24i}}{2}$$

$$= -i\sqrt{\frac{32}{4}} \pm \sqrt{\frac{-32+24i}{4}}$$

$$= -i2\sqrt{2} \pm \sqrt{-8+6i}$$

$$= -i2\sqrt{2} \pm (1+3i)$$

כאשר את השורש $\sqrt{-8+6i}$ נחשב על ידי מעבר לפולרית:

$$\sqrt{-8+6i} = \left(\sqrt{64+36}e^{i\left(\arctan\left(-\frac{6}{8}\right)+\pi\right)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(10e^{i\left(\arctan\left(-\frac{3}{4}\right)+\pi\right)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{10}e^{\frac{1}{2}i\left(\pi-\arctan\left(\frac{3}{4}\right)\right)} = \pm(1+3i)$$

(את המעבר האחרון עשינו במחשבון. כדי להימנע מהמחשבון אפשר לפתור את התרגיל על ידי הצבה $z = x+yi$ ופתרון מערכת משוואות כמו בסעיף הבא.)

לכן הפתרונות הם: $z_1 = 1+(3-2\sqrt{2})i$ ו $z_2 = -1-(3+2\sqrt{2})i$.

ב. נסמן $z = x+iy$. אז

$$x - iy = 2(x^2-y^2+2xyi)$$

לכן נקבל 2 משוואות:

$$x = 2x^2-2y^2$$
$$-y = 4xy$$

אם $y=0$ אז

$$x = 2x^2$$

כלומר $x = 0, \frac{1}{2}$.

אחרת $x = -\frac{1}{4}$ ואז

$$-\frac{1}{4} = \frac{2}{16} - 2y^2$$

אז $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{4}$.

סך הכל: $z \in \left\{0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{3}}{4}\right\}$

ג. נסמן $z = x + iy$. אז

$$x^2 + y^2 = 2x$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1$$
$$(x-1)^2 + y^2 = 1^2$$

כלומר קבוצת הפתרונות הינה מעגל ברדיוס 1 סביב $(1,0)$.

ד. נסמן $z = re^{i\varphi}$. אז

$$r^3 e^{i3\varphi} + 4r = 0$$

אם $r = 0$ אז $z = 0$. אחרת נקבל

$$r^2 e^{i3\varphi} = -4 = 4e^{i\pi}$$

כלומר $r = 2$ ו $\varphi = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}$ עבור k שלם. נקבל ערכים שונים רק עבור $k \in \{0,1,2\}$.

סך כל הפתרונות:

$$z = 0, 2e^{\frac{\pi i}{3}}, 2e^{\pi i}, 2e^{\frac{5\pi i}{3}}$$
$$= 0, 1 + \sqrt{3}i, -2, 1 - \sqrt{3}i$$

ה. נשתמש בנוסחת דה מואבר ונקבל

$$z_1 = 1$$
$$z_2 = e^{\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$z_3 = e^{\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

חלק ד – שאלות כלליות

1. $z - i = z + i$ שקול ל $i = -i$. אין פתרון.
2.

א. הערך המוחלט של כל שורש הינו $\sqrt[20]{2} = \sqrt[10]{\sqrt{2}}$. לכן נקבל $10\sqrt[20]{2}$.

ב. כל אחד מהשורשים מקיים את המשוואה. לכן לכל $1 \le i \le 10$ מתקיים

$$z_i^{40} = (z_i^{10})^4 = (1-i)^4 = 4e^{-\pi i} = -4$$

סך הכל נקבל $z_1^{40} + z_2^{40} + \cdots + z_{10}^{40} = -40$

3. ניעזר בעובדות הבאות: $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{RE}(z) \in \mathbb{R}$ וגם $z \cdot \bar{z} = |z|^2 \in \mathbb{R}$. לכן אם נסמן

$$\alpha = \frac{6 + 13i}{1 - 2i}$$

אז

$$(z - \alpha)(z - \bar{\alpha}) = z^2 - (\alpha + \bar{\alpha})z + \alpha\bar{\alpha}$$

הינה משוואה ריבועית עם מקדמים ממשיים בעלת שורש α.

4. בצורה פולרית נקבל $-8 + 8\sqrt{3}i = 16e^{\frac{i2\pi}{3}}$. לכן

$$z_1 = 2e^{\frac{\pi i}{6}} = \sqrt{3} + i$$
$$z_2 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)} = -1 + \sqrt{3}i$$
$$z_3 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)} = -\sqrt{3} - i$$
$$z_4 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{2}\right)} = 1 - \sqrt{3}i$$

א.

$$\left|\frac{z_3^k \cdot z_4^2}{z_1^2 \cdot z_2^k}\right| = \left|\frac{2^k e^{ik\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)} \cdot 2^2 e^{i2\left(\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{2}\right)}}{2^2 e^{2\frac{\pi i}{6}} \cdot 2^k e^{ik\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)}}\right| = \left|\frac{e^{ik\pi} \cdot e^{i3\pi}}{e^{\frac{ik\pi}{2}}}\right| = \left|-e^{\frac{ik\pi}{2}}\right| = 1$$

ב. $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 \cdot z_5 = 16$ אז

$$2^4 e^{i\left(\frac{4\pi}{6}+3\pi\right)} \cdot z_5 = 16$$
$$16e^{i\left(\frac{2\pi}{3}-\pi\right)} \cdot z_5 = 16$$
$$e^{-i\frac{\pi}{3}} \cdot z_5 = 1$$
$$z_5 = e^{\frac{\pi i}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$$

5. נזכור כי $|z| = z \cdot \bar{z}$ ונשתמש בעובדה כי $z \in \mathbb{R}$ אם"ם $z = \bar{z}$. כלומר נראה כי

$$\frac{z-w}{1-zw} = \overline{\left(\frac{z-w}{1-zw}\right)}$$
$$\frac{z-w}{1-zw} = \frac{\bar{z}-\bar{w}}{1-\overline{zw}}$$

נכפיל באלכסון:

$$(z-w)(1-\overline{zw}) = (\bar{z}-\bar{w})(1-zw)$$

נפתח סוגריים:

$$z - w - z\overline{zw} + w\overline{zw} = \bar{z} - \bar{w} - \bar{z}zw + \bar{w}zw$$

עתה מתקיים $z\bar{z} = |z| = 1$ וגם $w\bar{w} = |w| = 1$ לכן נקבל

$$z - w - \bar{w} + \bar{z} = \bar{z} - \bar{w} - w + z$$

כלומר:

$$0 = 0$$

ולכן מתקיים תמיד.

אינדוקציה - פתרונות

חלק א - אינדוקציה

1. הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים $2^n > n$

<u>הוכחה:</u>

ראשית, נראה את בסיס האינדוקציה עבור $n=1$. אכן,

$2^1 > 1$

כעת נעבור לשלב האינדוקציה. מוכיחים כי לכל k טבעי מתקיים $P_k \Rightarrow P_{k+1}$. כלומר, מוכיחים שאם P_k נכון אז גם P_{k+1} נכון. נניח אפוא ש- P_k נכון, כלומר, $2^k > k$. נרצה להוכיח ש- P_{k+1} נכון, כלומר, $2^{k+1} > k+1$. נשים לב שמהנחת האינדוקציה, מתקיים:

$2^{k+1} = 2\cdot 2^k > 2k$

כלומר, מספיק לנו להוכיח ש- $2k \ge k+1$ (כי אז $2^{k+1} > 2k \ge k+1$ כנדרש). אבל כיוון ש-k טבעי, כלומר $k \ge 1$, אז בודאי ש- $2k \ge k+1$ ולכן הושלם שלב האינדוקציה. לפי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

2. הוכיחו כי לכל n טבעי, $8^n - 3^n$ מתחלק ב-5 ללא שארית (זהו מקרה פרטי של תרגיל 7)

<u>הוכחה:</u>

ראשית, נראה את בסיס האינדוקציה עבור $n=1$. אכן,

$8^1 - 3^1 = 5$

מתחלק ב-5 ללא שארית. כעת נעבור לשלב האינדוקציה. מוכיחים כי לכל k טבעי מתקיים $P_k \Rightarrow P_{k+1}$. כלומר, מוכיחים שאם P_k נכון אז גם P_{k+1} נכון. נניח אפוא ש- P_k נכון, כלומר, $8^k - 3^k$ מתחלק ב-5 ללא שארית. נרצה להוכיח ש- P_{k+1} נכון, כלומר, $8^{k+1} - 3^{k+1}$ מתחלק ב-5 ללא שארית. נשים לב שמתקיים:

$$8^{k+1} - 3^{k+1} = 8\cdot 8^k - 3\cdot 3^k = 8\cdot 8^k - 8\cdot 3^k + 8\cdot 3^k - 3\cdot 3^k = 8\left(8^k - 3^k\right) + 5\cdot 3^k$$

נשים לב שהאיבר השמאלי מתחלק ב-5 מהנחת האינדוקציה, והאיבר הימני הוא מכפלה של 5 ולא מתחלק ב-5, ולכן הסכום בהכרח מתחלק ב-5. הושלם שלב האינדוקציה. לפי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

3. הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$

ראשית, נראה את בסיס האינדוקציה עבור $n=1$. אכן,

$$1 = \left(\sum_{i=1}^{1} i\right)^2 = \sum_{i=1}^{1} i^3 = 1$$

כעת נעבור לשלב האינדוקציה. מוכיחים כי לכל k טבעי מתקיים $P_k \Rightarrow P_{k+1}$. כלומר, מוכיחים שאם P_k

נכון אז גם P_{k+1} נכון. נניח אפוא ש- P_k נכון, כלומר, $\sum_{i=1}^{k} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{k} i\right)^2$. נרצה להוכיח ש- P_{k+1} נכון,

כלומר $\sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{k+1} i\right)^2$. נשים לב שמהנחת האינדוקציה , ומתרגיל 1 בכיתה, מתקיים:

$$\left(\sum_{i=1}^{k+1} i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{k} i + (k+1)\right)^2$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{k} i\right)^2 + 2(k+1)\left(\sum_{i=1}^{k+1} i\right) + (k+1)^2$$
$$\boxed{=} \sum_{i=1}^{k} i^3 + 2(k+1)\cdot\frac{k(k+1)}{2} + (k+1)^2 = \sum_{i=1}^{k+1} i^3$$

כאשר המעבר $\boxed{=}$ נובע מהנחת האינדוקציה. לפי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

4. הוכיחו כי לכל $n \geq 2$ טבעי מתקיים $n! < n^n$

ראשית, נראה את בסיס האינדוקציה עבור $n = 2$. אכן,

$$2 = 2! < 2^2 = 4$$

כעת נעבור לשלב האינדוקציה. מוכיחים כי לכל k טבעי מתקיים $P_k \Rightarrow P_{k+1}$. כלומר, מוכיחים שאם P_k נכון אז גם P_{k+1} נכון. נניח אפוא ש- P_k נכון, כלומר, $k! < k^k$. נרצה להוכיח ש- P_{k+1} נכון, כלומר $(k+1)! < (k+1)^{k+1}$. נשים לב שמהנחת האינדוקציה מתקיים:

$$(k+1)! = (k+1)k! < (k+1)k^k < (k+1)(k+1)^k = (k+1)^{k+1}$$

כנדרש. הושלם שלב האינדוקציה. לפי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

5. מצאו את p עבורו לכל $n \geq p$ טבעי מתקיים $n! \geq 2^n$ והוכיחו את הטענה.

ראשית, נראה את בסיס האינדוקציה עבור $n = 4$. אכן,

$$24 = 4! \geq 2^4 = 16$$

כעת נעבור לשלב האינדוקציה. מוכיחים כי לכל k טבעי מתקיים $P_k \Rightarrow P_{k+1}$. כלומר, מוכיחים שאם P_k נכון אז גם P_{k+1} נכון. נניח אפוא ש- P_k נכון, כלומר, $k! \geq 2^k$. נרצה להוכיח ש- P_{k+1} נכון, כלומר $(k+1)! \geq 2^{k+!}$. נשים לב שמהנחת האינדוקציה מתקיים:

$$(k+1)! = (k+1)k! \geq (k+1)2^k \geq 2\cdot 2^k = 2^{k+1}$$

כנדרש. הושלם שלב האינדוקציה. לפי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

6. הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n}}$

<u>נסיון ראשון להוכחה:</u> בסיס האינדוקציה $n = 1$ מתקיים כי אכן $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

צעד האינדוקציה: $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{2n}}\cdot\frac{2n+1}{2n+2} \leq_{(?)} \frac{1}{\sqrt{2n+2}}$. נבדוק האם אי-השוויון הימני מתקיים:

$$\frac{1}{\sqrt{2n}}\cdot\frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+2}} \Leftrightarrow \frac{2n+1}{\sqrt{2n}} \leq \frac{2n+2}{\sqrt{2n+2}} \Leftrightarrow 2n+1 \leq \sqrt{2n}\sqrt{2n+2} \Leftrightarrow 4n^2+4n+1 \leq 4n^2+4n$$

וזה כמובן לא נכון. כלומר, לא הצלחנו להוכיח את הטענה בדרך הזו. (זה לא אומר שהטענה לא נכונה!)

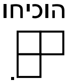
<u>נסיון שני (ומוצלח) להוכחה:</u> במקום להוכיח את הטענה הזו, נוכיח **טענת עזר**:
לכל n טבעי מתקיים $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$. מכיוון ש- $\frac{1}{\sqrt{2n+1}} < \frac{1}{\sqrt{2n}}$ אפשר לראות שמהטענה האחרונה הזו נובעת המטענה המקורית שהתבקשנו להוכיח, כלומר – זוהי טענה חזקה יותר. נוכיחה באינדוקציה.
בסיס האינדוקציה $n=1$ מתקיים כי אכן $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$.
צעד האינדוקציה: $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\cdot\frac{2n+1}{2n+2} \leq_{(?)} \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$. נבדוק את אי-השוויון הימני:
$$\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\cdot\frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+3}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2n+1}}{2n+2} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+3}} \Leftrightarrow \sqrt{2n+1}\sqrt{2n+3} \leq 2n+2 \Leftrightarrow 4n^2+8n+3 \leq 4n^2+8n+4$$
וזה כבר נכון. כלומר, הוכחנו את הטענה.

<u>מוסר השכל:</u> איך הצלחנו להוכיח טענה חזקה יותר, למרות שנכשלנו בלהוכיח את הטענה החלשה יותר? כדאי לשים לב שבהוכחה באינדוקציה אמנם התוצאה שמוכיחים חזקה יותר, אבל גם הנחת האינדוקציה עצמה חזקה יותר, ולכן זה מסתדר.

7. יהיו a,b מספרים טבעיים. הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים ש- a^n-b^n מתחלק ב- $a-b$ ללא שארית.
הנחיה: c מתחלק ב- d ללא שארית אם ורק אם קיים k טבעי כך ש- $c=d\cdot k$.
הוכחה: בדומה לתרגיל 2, כאשר בשלב האינדוקציה נשים לב ש-
$$a^{k+1}-b^{k+1}=a\cdot a^k-b\cdot b^k=a\cdot a^k-a\cdot b^k+a\cdot b^k-b\cdot b^k=a\left(a^k-b^k\right)+(a-b)\cdot b^k$$

חלק ב - עוד תרגילים

1. הוכיחו כי לכל $n\geq 5$ מתקיים $n\geq\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$
<u>הוכחה:</u> בסיס האינדוקציה: עבור $n=5$ מתקבל אי-השוויון: $5\geq\sqrt{6}+\sqrt{5}$. נבדוק שזה אכן נכון:
$5\geq\sqrt{6}+\sqrt{5} \Leftrightarrow 25\geq 6+2\sqrt{6}\sqrt{5}+5 \Leftrightarrow 14\geq 2\sqrt{30} \Leftrightarrow 49\geq 30$ (פסוק אמת)
צעד האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה ל-n ונראה שהיא נכונה גם לעוקב שלו, $n+1$:
$$\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\leq\sqrt{n+2}+\left(n-\sqrt{n}\right)\leq_{(?)} n+1$$
נבדוק שאי-השוויון הימני באמת מתקיים. הוא שקול לכך ש-
$$\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\leq 1 \Leftrightarrow (n+2)+n-2\sqrt{n}\sqrt{n+2}\leq 1 \Leftrightarrow 2n+1\leq 2\sqrt{n}\sqrt{n+2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4n^2+4n+1\leq 4n(n+2) \Leftrightarrow 1\leq 4n$$
ואי-השוויון האחרון כמובן נכון לכל n טבעי (ובפרט ל-$n\geq 5$).

2. הוכיחו שכל לוח שחמט מגודל $2^n\times 2^n$ שהוצאה ממנו משבצת אחת בדיוק, ניתן לריצוף ע"י אבנים מהצורה .
<u>הוכחה:</u> בסיס האינדוקציה: עבור $m=1$ הלוח הוא בגודל 2×2 והסרת משבצת אחת משאירה אותו בצורת אבן דומינו (למעשה זה עובד כבר עבור $m=0$).
צעד האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה ללוח בגודל $2^m\times 2^m$, ושנתון לנו לוח בגודל $2^{m+1}\times 2^{m+1}$ (פחות משבצת אחת) שעלינו לכסות באבני דומינו מהצורה הנתונה. נחלק את הלוח לארבע חלקים שווים. המשבצת החסרה מופיעה באחד החלקים הללו ולכן את אותו רבע אפשר לכסות מהנחת האינדוקציה. כעת, נמקם אבן דומינו במרכז הלוח (במפגש של ארבעת החלקים), כך שהיא תכסה משבצת מכל אחד משלוש הרבעים הנותרים. נשאר לנו לכסות את שלוש הרבעים הנותרים, שבכל אחד מהם יש כעת משבצת מכוסה – וזאת אפשר לעשות שוב ע"פ הנחת האינדוקציה. סה"כ תארנו שיטה לכיסוי כל הלוח באבני דומינו כנ"ל.

3. הוכיחו כי לכל $n\geq 2$ מתקיים $2^n+4^n\leq 5^n$
<u>הוכחה:</u> בסיס האינדוקציה: עבור $n=2$ מתקבל $20=2^2+4^2\leq 5^2=25$ וזה אכן נכון.
צעד האינדוקציה: נניח נכונות עבור n ונראה שמכאן נובעת נכונות עבור $n+1$. נצא מאגף שמאל:
$$2^{n+1}+4^{n+1}=2\cdot 2^n+4\cdot 4^n=2\cdot(2^n+4^n)+2\cdot 4^n\leq 2\cdot 5^n+2\cdot 5^n=4\cdot 5^n\leq 5^{n+1}$$

4.

א) הוכיחו שלכל n טבעי מתקיים: $\frac{2}{2\cdot3}+\frac{2}{3\cdot4}+\cdots+\frac{2}{(n+1)(n+2)}=\frac{n}{n+2}$.

<u>הוכחה:</u> עבור $n=1$ אכן מתקיים $\frac{2}{(1+1)\cdot(1+2)}=\frac{2}{2\cdot3}=\frac{1}{3}=\frac{1}{1+2}$ (בסיס האינדוקציה).

כעת, בהנחת נכונות עבור $n\in\mathbb{N}$ כלשהו מקבלים נכונות גם ל-$(n+1)$:

$$\frac{2}{2\cdot3}+\frac{2}{3\cdot4}+\cdots+\frac{2}{(n+1)(n+2)}+\frac{2}{(n+2)(n+3)}=\frac{n}{n+2}+\frac{2}{(n+2)(n+3)}=\frac{n^2+3n+2}{(n+2)(n+3)}=\frac{(n+2)(n+1)}{(n+2)(n+3)}=\frac{n+1}{n+3}$$

ולכן, מאינדוקציה, הטענה נכונה לכל $n\in\mathbb{N}$.

ב) מצאו בהסתמך על סעיף א' את הסכום: $\frac{2}{42}+\frac{2}{56}+\frac{2}{72}+\cdots+\frac{2}{870}$.

<u>פתרון:</u> אגף שמאל אינו מהצורה של אגף שמאל בסעיף א', אלא נראה שהוא מתחיל מ-$\frac{2}{6\cdot7}$ ומסתיים ב-$\frac{2}{29\cdot30}$ (כלומר האיבר האחרון מתקבל עבור $n=28$). לכן, נוכל לכתוב:

$$\frac{2}{42}+\frac{2}{56}+\frac{2}{72}+\cdots+\frac{2}{870}=\left(\frac{2}{2\cdot3}+\frac{2}{3\cdot4}+\cdots+\frac{2}{870}\right)-\left(\frac{2}{2\cdot3}+\cdots+\frac{2}{5\cdot6}\right)=\frac{28}{28+2}-\frac{4}{4+2}=\frac{14}{15}-\frac{2}{3}=\frac{4}{15}$$

כאשר את הסכומים בשני הסוגריים חישבנו לפי הטענה שהוכחנו בסעיף א'.

5. הוכיחו:

א) $1+4+9+16+\cdots+n^2=\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

<u>הוכחה:</u> בסיס האינדוקציה $n=1$: אכן מתקיים $1=\frac{1\cdot2\cdot(2\cdot1+1)}{6}$.

צעד האינדוקציה: נניח נכונות ל-n אז עבור $n+1$ יתקיים

$$1+\cdots+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=(n+1)\left[\frac{n(2n+1)}{6}+(n+1)\right]=$$
$$=\frac{n+1}{6}[2n^2+n+6n+6]=\frac{(n+1)}{6}(n+2)(2n+3)=\frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$$

הראינו שהטענה נכונה ל-$n=1$ ושנכונות ל-n גוררת גם נכונות ל-$(n+1)$ ולכן לפי עקרון האינדוקציה היא נכונה לכל n טבעי.

ב) $1^2\cdot n+2^2(n-1)+3^2(n-2)+\cdots+n^2\cdot1=\frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$.

<u>הוכחה:</u> עבור $n=1$ אכן $1=\frac{1\cdot2^2\cdot3}{12}$. כעת, עבור $n+1$ נובע מהנחת האינדוקציה:

$$1^2\cdot(n+1)+2^2\cdot n+3^2\cdot(n-1)+\cdots+n^2\cdot2+(n+1)^2\cdot1=$$
$$=1^2\cdot n+2^2\cdot(n-1)+\cdots+n^2\cdot1+1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=$$
$$=\frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}+\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}=\frac{(n+1)(n+2)}{12}[n(n+1)+2(2n+3)]=$$
$$=\frac{(n+1)(n+2)}{12}[n^2+5n+6]=\frac{(n+1)(n+2)^2(n+3)}{12}$$

כאשר את סכום הריבועים ידענו לחשב לפי הטענה שהוכחנו בסעיף א'.

6. מצאו איזו מהנוסחאות: (א) $\log\frac{2n^2}{n!}$, (ב) $\log\frac{(n+1)^n}{n!}$, (ג) $\log\frac{n^3+1}{n!}$ מייצגת את סכום n האיברים הראשונים של הטור $1\log\frac{2}{1}+2\log\frac{3}{2}+3\log\frac{4}{3}+4\log\frac{5}{4}+\cdots$ והוכיחו את נכונותה.

<u>פתרון:</u> הדרך הכי פשוטה לקבוע איזה מהביטויים מתאים היא לנסות להציב ערכים קטנים של n ולבדוק.

עבור $n=1$ הסכום הוא $\log 2$, אבל גם שלושת הביטויים נותנים $\log 2$ (בדקו!) לכן אי-אפשר עוד להכריע.

עבור $n=2$ הסכום הוא $\log\frac{9}{2}$, ביטויים (ב),(ג) אכן נותנים $\log\frac{9}{2}$ (בדקו!) אבל ביטוי (א) נותן $\log 4$.

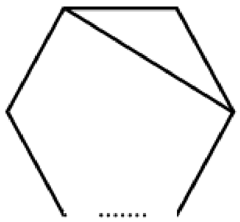
עבור $n=3$ הסכום הוא $\log\frac{32}{3}$, ביטוי (ב) נותן $\log\frac{4^3}{3!}=\log\frac{32}{3}$ בעוד ביטוי (ג) הוא $\log\frac{27+1}{3!}=\log\frac{14}{3}$.

ראינו, אם כן, שביטויים (א),(ג) לא מתאימים ונשאף להוכיח שהסכום אכן נתון ע"י ביטוי (ב). את בסיס האינדוקציה כבר יש לנו, ולכן נראה את צעד האינדוקציה עבור $n+1$:

$$1\log\frac{2}{1}+2\log\frac{3}{2}+3\log\frac{4}{3}+\cdots+n\log\frac{n+1}{n}+(n+1)\log\frac{n+2}{n+1}=\log\frac{(n+1)^n}{n!}+(n+1)\log\frac{n+2}{n+1}=$$
$$=\log\left[\frac{(n+1)^n}{n!}\cdot\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}\right]=\log\left[\frac{(n+1)^n}{n!}\cdot\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n\cdot\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\right]=\log\left[\frac{(n+2)^n}{n!}\cdot\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\right]=\log\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)!}$$

7. הוכיחו באינדוקציה שסכום זוויותיו של מצולע קמור בעל $n \geq 3$ צלעות הוא $180°(n-2)$.

<u>הוכחה:</u> עבור $n=3$ צלעות מתקבל משלוש שסכום זוויותיו הוא אכן $180° = 180°(3-2)$.



עבור מצולע בעל $n+1$ צלעות נרצה להשתמש בהנחת האינדוקציה (עבור במקרה של מצולע עם n צלעות בלבד), ולכן נחבר באלכסון שני קודקודים שביניהם קודקוד שלישי – ראו ציור. באופן זה נוצר מצולע בן n צלעות ומשולש.

סכום הזוויות של המצולע הוא $180°(n-2)$, לפי הנחת האינדוקציה, וסכום הזוויות של המשולש הוא כמובן $180°$. סכום הזוויות של המצולע הגדול הוא בדיוק סכום הזוויות במצולעים שמרכיבים אותו:

$180°(n-2) + 180° = 180°(n-1)$, כפי שרצינו להוכיח.

8. מטריגונומטריה של תיכון אנו מכירים את הנוסחאות: $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, $\sin 2x = 2\sin x \cos x$.

בתרגיל הזה נכליל אותן ונקבל נוסחאות עבור $\cos nx$, $\sin nx$ ע"י כפולינום של $\cos x$ ו-$\sin x$.

א) הוכיחו כי לכל n קיים פולינום $P_n(x)$ ממעלה n כך ש-$\cos nx = P_n(\cos x)$. [למשל $P_2(x) = 2x^2 - 1$]

ב) הוכיחו כי לכל n קיים פולינום $Q_{n-1}(x)$ ממעלה $n-1$ כך ש-$\sin nx = \sin x \cdot Q_{n-1}(\cos x)$.

הערה: הפולינומים P_n, Q_n נקראים פולינומי צ'ביצ'ב (Chebyshev).

<u>הוכחה:</u> נוכיח את שני הסעיפים ביחד באינדוקציה על n.

בסיס האינדוקציה עבור $n=1$ (טריוויאלי) ו-$n=2$ (הנוסחאות מהתיכון).

נניח נכונות לאיזשהו n טבעי. שלב האינדוקציה – עבור קוסינוס:

$$\cos\big((n+1)x\big) = \cos nx \cos x - \sin nx \sin x = P_n(\cos x)\cdot \cos x - Q_{n-1}(\cos x)\cdot \sin^2 x =$$
$$= \cos x\, P_n(\cos x) + (\cos^2 x - 1)Q_{n-1}(\cos x) =: P_{n+1}(\cos x)$$

עבור סינוס:

$$\sin\big((n+1)x\big) = \sin nx \cos x + \cos nx \sin x = Q_{n-1}(\cos x)\cdot \sin x \cos x + P_n(\cos x)\cdot \sin x =$$
$$= \sin x\,[\cos x\, Q_{n-1}(\cos x) + P_n(\cos x)] =: \sin x \cdot Q_n(\cos x)$$

כלומר הראינו שניתן להגדיר פולינומים מתאימים לפי הנוסחאות הבאות:

$$P_{n+1}(t) = tP_n(t) + (t^2-1)Q_{n-1}(t)$$
$$Q_n(t) = tQ_{n-1}(t) + P_n(t)$$

הערה: אם ההוכחה אינה ברורה, הציבו $n=3$ וקבלו זהות טריגונומטית מוכרת נוספת.

קומבינטוריקה – פתרונות

1. $12 \cdot 2 \cdot 3 = 72$
2. א. ע"פ עקרון הסכום, ישנן 50 = 30 + 20 דרכים לבחור נציג משתי הכיתות .
ב. ע"פ עקרון הכפל, ישנן 600 = 30 · 20 דרכים לבחור נציג אחד מ – ה'1 ונציג אחד מ – ה'2.

3. $4 \cdot 8 = 32$
4. א. מעיקרון הכפל כמו הדוגמא בשיעור, $4 \cdot 4 = 16$
ב. מעיקרון הסכום, $4 + 4 = 8$
ג. מקרה ראשון: בחרנו שני ג'וקרים (זו אפשרות אחת). מקרה שני: בחרנו ג'וקר אחת (שתי אפשרויות) וקלף נוסף שאינו ג'וקר (52 אפשרויות). סה"כ $1 + 2 \cdot 52 = 105$
ד. $2 \cdot 26 = 52$
ה. 1
ו. מקרה ראשון: בחרנו מלך שחור (2 אפשרויות) וקלף אדום (26 אפשרויות). מקרה שני: בחרנו שני מלכים אדומים (אפשרות אחת). מקרה שלישי: בחרנו מלך אדום (שתי אפשרויות) וקלף אדום נוסף שאינו מלך (24 אפשרויות). סה"כ $2 \cdot 26 + 1 + 2 \cdot 24 = 101$
ז. שתי הקבוצות הזרות הן קבוצת הקלפים האדומים וקבוצת המלכים השחורים, לכן סה"כ $26 + 2 = 28$
ח. מקרה ראשון: מלכה לב (אפשרות אחת) וקלף לב שאינו מלכה (12 אפשרויות). מקרה שני: מלכה יהלום (אפשרות אחת) וקלף לב כלשהו (13 אפשרויות). סה"כ $1 \cdot 12 + 1 \cdot 13 = 25$
5. א. $22 \cdot 21 = 462$ ב.$22 \cdot 22 = 484$
6. א. קבוצת הספרות שיכולות להיות ספרת האלפים היא $A = \{2,3,4,5\}$. ברור כי זו גם קבוצת הספרות שיכולות להיות ספרת המאות. כנ"ל לגבי העשרות והאחדות. ע"פ עקרון הכפל נקבל כי ניתן להרכיב $4^4 = 256$ מספרים.
ב. נסמן ב- B את מספר האפשרויות להרכיב מספר בן 4 ספרות מהספרות הנתונות. נשים לב שניתן לפרק את B לשתי קבוצות זרות – המספרים שלא מכילים את הספרה 3 בכלל והמספרים שמכילים את הספרה 3 לפחות פעם אחת.
מספר האופציות לייצר מספרים 4 ספרתיים מהספרות $\{2,4,5\}$ הוא $3^4 = 81$. לכן מעיקרון הסכום והעברת אגפים נקבל $256 - 81 = 175$
7. נסמן A_i – קבוצת האפשרויות למקום ה- i. $|A_i| = n$, לכן $|A_1 \times \ldots \times A_k| = |A_i|^k = n^k$
8. נסמן ב-G את מספר הבנות ונספור את מספר ההיכרויות בכיתה (x) בשני אופנים:
$$x = 32 \cdot 5 = G \cdot 8 = 160 \quad => G = 20$$
9. נסמן ב- M את מספר המושבניקים ונספור את כמות לחיצות הידיים x בשני אופנים:
$$x = 36 \cdot 3 = M \cdot 4 \quad => \quad M = 27$$
10. נסמן את מספר הנסיכים ב- p. אז צריך להתקיים $12p = 20 \cdot 9$ לכן $p = 15$.
11. מקרה ראשון: המילה מתחילה ב־א' (אפשרות אחת), ואז יש לבחור 4 אותיות נוספות22^4 אפשרויות.
מקרה שני: המילה מתחילה ברצף "גזר" (אפשרות אחת) ואז יש לבחור 2 אותיות נוספות - 22^2 אפשרויות. מקרה שלישי: המילה מסתיימת בשתי אותיות אהו"י 4^2 אפשרויות. ואז יש לבחור שלוש אותיות ראשונות שאינן מתחילות ב־א' ואינן גזר $21 \cdot 22 \cdot 22 - 1$().סה"כ:
$$1 \cdot 22^4 + 1 \cdot 22^2 + 4^2 \cdot (21 \cdot 22 \cdot 22 - 1)$$
12. א. $22^3 - 22$ ב.$22 \cdot 21 \cdot 20$ ג.$22 \cdot 21 \cdot 21$
13. $n!$ – הסבר: נסדר את הגברים באופן כלשהו לא משנה איך, ואז את כל האפשרויות שיש לסדר את הנשים בשורה. (פתרון שגוי נפוץ - $(n!)^2$ אך זה מוביל לספירות כפולות..).
14. נדמיין שיש עוד כלב אחד, מעין כלב בלתי־נראה. ואז נוכל לחשוב על סדרת הניסויים הבאה:

- בחירת רווק - n + 1 אפשרויות
- זיווג n נשים ל־n גברים - n! אפשרויות
- זיווג n כלבים ל־n זוגות - n! אפשרויות

עקרון המכפלה מוביל לפתרון כולל של n! (n + 1)!.

15. ראשית נבחר רווק (n + 1 אפשרויות). אח"כ נעמיד את הגברים בסדר כלשהו (לא חשוב) ונעמיד את הנשים בשורה מולם (כן חשוב ־ n! אפשרויות). סה"כ: (n+1)!
דרך אחרת לחשוב על זה: להוסיף אישה דמיונית, ולסדר n + 1 נשים (כולל הדמיונית) בשורה מול n + 1 גברים (זה מול הדמיונית יהיה הרווק).
16. $\frac{10!}{2!3!2!2!1!}$
17. נפריד למקרים:
אם ב' ראשונה אז יש לנו ב- - - - - - - - - ג ויש לסדר 5 א', 2 ב' ו-1 ג' - $\frac{8!}{5!2!1!}$
אם ג' ראשונה אז יש לנו ג- - - - - - - - - ג ויש לסדר 5 א', 3 ב' ו-0 ג' - $\frac{8!}{5!3!0!}$ (כאשר $0! = 1$)
בסופו של דבר מעיקרון הסכום $\frac{8!}{5!3!} + \frac{8!}{5!2!}$
18. נמקם ד' במקום האחרון ונפריד את שאר האפשרויות למקרים:
אות ראשונה ו'/נ'/ל'/א' - $\frac{6!}{2!}$
אות ראשונה ד' $6!$
ולסיכום: $4 \cdot \frac{6!}{2!} + 6! = 3 \cdot 6!$
19. נפריד למקרים לפי האות שאיננו משתמשים בה באופן "מלא":
ללא א'/ב' - $\frac{7!}{3!2!2!}$
ללא ג' - $\frac{7!}{3!3!1!}$
ולסיכום: $2 \cdot \frac{7!}{3!2!2!} + \frac{7!}{3!3!}$
20. א. $10!$
ב. $3!\,5!\,3!\,2!$

ג. נסמן ב- U את קבוצת כל הסידורים בהם ספרי המדע צמודים, ונסמן ב- $A \subseteq U$ את קבוצת הסידורים הללו שבהם גם ספרי המתח צמודים. נשים לב כי $U \setminus A$ זו הקבוצה שאנו מחפשים, ושמתקיים

$$A \cap (U \setminus A) = \emptyset \,;\, A \cup (U \setminus A) = U$$

ולכן מעיקרון הסכום מתקיים $|A| = |U| - |U \setminus A|$. נחשב את איברי אגף ימין ונסיק את $|A|$.

נסמן ב- B את הדרכים לסדר 7 ספרים ואגד ספרי מדע-בדיוני בשורה, וב- S את הדרכים לסדר 3 ספרי מדע-בדיוני בשורה. כעת לכל איבר ב- $(b,s) \in B \times S$ נשים את סידור האגד s במקום האגד ב- b ונקבל איבר ב- U, וזוהי פעולה הפיכה. לכן יש בהן את אותה כמות איברים, כלומר $|U| = |B \times S|$. מעיקרון המכפלה $|B \times S| = |B| \cdot |S|$, ומנוסחה לסידור בשורה $|B| = 8!$ ו- $|S| = 3!$, ולכן $|U| = 8!\,3!$.

נסמן ב- C את הדרכים לסדר 5 ספרים, אגד ספרי מדע-בדיוני, ואגד ספרי מתח בשורה, וב- T את הדרכים לסדר 2 ספרי מתח בשורה. כעת באופן דומה לעיל נקבל כי $|U \setminus A| = |C \times S \times T| = 7!\,3!\,2!$.

$$|A| = 8!\,3! - 7!\,2!\,3!$$

ד. (א) $\frac{12!}{2!}$ (ב) נפריד למקרים: אם ספר היסטוריה בקצה: $2 \cdot 11!$. ספר היסטוריה לא בקצה ולידו ספר הפילוסופיה־הם יהיו בלוק, ואז: $2 \cdot 10 \cdot 10!$ (נבחר מקום לבלוק־ 10 אפשרויות כי לא באחד הקצוות, נסדר את שאר הספרים, נכפיל ב־2 לסידור פנימי)
מעיקרון החיבור נקבל $11! \cdot 2 + 20 \cdot 10!$

21. נסדר את n האנשים בשורה - $n!$ אפשרויות. נסגור למעגל ונחלק בכפילויות לכן $\frac{n!}{n}=(n-1)!$
22. נגדיר גוש – הבנות + יוגב, ומאידך יש את כל השאר.הגוש בגודל 5 וגם השאר בגודל 5. למעשה נרצה לסדר סה"כ 6 אלמנטים במעגל וזה $5!$ אפשרויות. נבדוק את הסידורים בתוך הגוש עצמו: לבנות יש $4!$ סידורים וליוגב 2 אפשרויות, סה"כ סידורים אפשריים לגוש $2\cdot 4!$ סה"כ $5!\cdot 2\cdot 4!$
23. בדיוק בחצי מהסידורים דני יהיה מימין לדנה ולכן $\frac{n!}{2}$.
24. נבחר ראשית מקום לשלושת המיוחדים - $\binom{10}{3}$. כעת נסדר את השאר בשורה - $7!$. כעת נשים את דני במקום הכי ימני מבין השלושה שבחרנו עבורם. נסדר את דנה ודינה - $2!$. סה"כ $\binom{10}{3}\cdot 7!\cdot 2!$.
25. נתייחס ל- $\{1,2,3\}$ כגוש, נסדר $\mathrm{n}-3$ איברים + הגוש סה"כ $(n-2)!$ אפשרויות. נסדר את הגוש $3!$ סה"כ $(n-2)!\,3!$.

לוגיקה בסיסית – פתרונות

זהו פתרון מוצע. ייתכנו פתרונות נוספים.

חלק א'

1. מספר זוגי הוא מספר שלם אשר מתחלק ב- 2, כלומר $\exists k\in\mathbb{Z}\,.\,n=2k$ כאשר $n\in\mathbb{Z}$.
2. נסמן את הקבוצה המוגדרת על ידי טענה א' ב- A ואת זו על ידי ב' ב- B.

$$A=\{x\in\mathbb{Z}|\exists y\in\mathbb{Z}\,.\,x=2y\}=\{2y|y\in\mathbb{Z}\}=2\mathbb{Z}$$
$$B=\{x\in\mathbb{Z}|\exists y\in\mathbb{Z}\,.\,x=3y\}=\{3y|y\in\mathbb{Z}\}=3\mathbb{Z}$$

נקרא ל- *קיים y שלם כך ש- x = 6y* $(\exists y\in\mathbb{Z}\,.\,x=6y)$ טענה ג'. נראה שהיא שקולה ל- "טענה א' וגם טענה ב'" $(\exists a\in\mathbb{Z}\,.\,x=2a\wedge\exists b\in\mathbb{Z}\,.\,x=3b)$.

כיוון 1: נניח כי $\exists a\in\mathbb{Z}\,.\,x=2a\wedge\exists b\in\mathbb{Z}\,.\,x=3b$ נכונה. אז ניקח את $a,b\in\mathbb{Z}$ המובטחים לקיים $2a=3b$. מאחר ו- 3 ראשוני, a מתחלק ב- 3 (כי אם מכפלה מתחלקת בראשוני לפחות אחד הגורמים מתחלק בראשוני). כלומר $\exists c\in\mathbb{Z}\,.\,a=3c$ ולכן $\exists c\in\mathbb{Z}\,.\,x=6c$.
כיוון 2: נניח כי $\exists y\in\mathbb{Z}\,.\,x=6y$. אז $\exists y\in\mathbb{Z}\,.\,x=2\cdot 3y$, כלומר בפרט $\exists a\in\mathbb{Z}\,.\,x=2a$ (אם $y\in\mathbb{Z}$ אז $3y\in\mathbb{Z}$). באופן דומה מראים גם התחלקות ב- 3.

כעת נסמן את הקבוצה המוגדרת על ידי ג' ב- C.

$$C=\{x\in\mathbb{Z}|\exists y\in\mathbb{Z}\,.\,x=2y\wedge\exists z\in\mathbb{Z}\,.\,x=3z\}=\{6y|y\in\mathbb{Z}\}=6\mathbb{Z}$$

בכל מקרה, בלי קשר לטענות הספציפיות, ניתן לראות כי $x\in C$ אמ"מ $x\in A$ וגם $x\in B$, כלומר אמ"מ $x\in A\cap B$. כלומר $C=A\cap B$. באופן דומה "טענה א' או טענה ב'" מגדירה את $A\cup B$, ו-"לא טענה א'" מגדירה את A^c (המספרים האי-זוגיים). על פי קשרים אלו ניתן לנסח את הקשר בין כללי דה-מורגן של קבוצות לכללי דה-מורגן של לוגיקה (נסו!).
3. פשוט להוסיף כמתים אוניברסליים כמספרים טבעיים: $\forall a\in\mathbb{N}\forall b\in\mathbb{N}\,.\,ab=x\rightarrow(a=1\vee b=1)$.
תחום הדיון הוא הטבעיים החיוביים. [שימו לב: זוהי הגדרה של ראשוניים במספרים הטבעיים, יש הגדרה דומה לשלמים, $\forall a\in\mathbb{Z}\forall b\in\mathbb{Z}\,.\,ab=x\rightarrow(a\in\{\pm1\}\vee b\in\{\pm1\})$.]

חלק ב׳

1. –

א. נוכיח את נכונותה. יהי $n \in \{0,1,2\}$. נחלק למקרים
אם $n = 0$ אז $1 > 0$ לא מתקיים והגרירה נכונה.
אם $n = 1$ דומה.
אם $n = 2$ אז אמנם מתקיים $2 > 1$ אבל גם מתקיים $2^2 > 0$.
סה״כ בכל מקרה הטענה מתקיימת, ולכן הפסוק נכון.

ב. נוכיח את שלילתה. שלילתה היא שקיים $n \in \{0,1,2\}$ כך ש- ״אם $n > 0$ אז $n^2 > 1$״ לא מתקיימת, כלומר שקיים $n \in \{0,1,2\}$ כך ש- $n > 0$ וגם $n^2 \leq 1$. אכן קיים כזה, ספציפית $n = 1$, שכן $1 > 0$ וגם $1^2 \leq 1$.

בהגדרה של אם p אז q אמרנו שאם p לא נכון הפסוק אוטומטית נכון, וזה מאוד שימושי והגיוני כאשר בודקים אפשרויות מרובות.

2. –

א. נראה כי הטענה נכונה. יהי $m \in \mathbb{Z}$. נחלק למקרים.
אם $m \in \mathbb{N}$ אז $n := m + 1 \in \mathbb{N}$ מקיים $m < n$.
אחרת $n := 1 \in \mathbb{N}$ מקיים $m < n$.
כלומר בכל מקרה יש $n \in \mathbb{Z}$ כרצוי.

ב. נראה כי הטענה לא נכונה, כלומר שלילתה $\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{Z} . m \geq n$ נכונה. יהי $n \in \mathbb{N}$. אז $m := n + 1 \in \mathbb{Z}$ מקיים $m \geq n$, כרצוי.

מוסר ההשכל הוא שסדר כתיבת הכמתים חשוב, כי הנה מקרה שזה כל ההבדל והוא משנה פסוק נכון לפסוק שגוי. מהפך כזה, שבו הקיים עובר להיות לפני הלכל, נקרא גרסת ה*במ״ש (במידה שווה)* של הטענה, שכן בגרסה צריך למצוא את אותה דוגמה לכל המקרים (אז הטענה מתקיימת באותו אופן – במידה שווה – עבור כל האפשרויות).

נציין כאן בנוסף שהחלפת סדר של כמתי לכל או של כמתי קיים דווקא לא משנה.

3. קבוצה גדולה ביותר אומר שהיא גדולה מכל הקבוצות, כלומר נאמר כי $X \in \mathcal{F}$ גדולה ביותר אם מתקיים ש- $\forall Y \in \mathcal{F} . Y \subseteq X$.

א. $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\} \subseteq \{0,1\}$ (כל האופציות להשמיט איברים מתוך $\{0,1\}$).

ב. אכן, $\{0,1\}$ גדולה ביותר באוסף, שכן עלינו להוכיח כי כל תת קבוצה מוכלת בה, וזה בדיוק מה שכתוב בסעיף א׳.

ג. $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\} \subseteq \{0,1,2\}$.

ד. אין קבוצה גדולה ביותר באוסף זה – צריך להראות שכל אחת מהן אינה גדולה ביותר. הקבוצות $\emptyset, \{0\}$ לא מכילות את $\{1\}$ ולכן לא מכילות את כל הקבוצות באוסף. הקבוצות $\{1\}, \{2\}$ לא מכילות את $\{0\}$ ולכן לא מכילות את כל הקבוצות באוסף. עברנו על כל האפשרויות.

4. –

א. לא נכון, כי יש את הקבוצה $X = \emptyset$ עבורה זה לא נכון (כי $Y \setminus \emptyset = \emptyset$ לכל Y ובפרט אינה סינגלטון).

ב. נראה שהטענה נכונה. תהי קבוצה X. צריך להציג Y כמצופה. אז ניקח איבר $a \notin X$ כלשהו, ונגדיר $Y = X \cup \{a\}$. כעת $Y \setminus X = \{a\}$ סינגלטון (ראינו כי $A \cup B \setminus B = A$ לכל זוג קבוצות A, B).

5. נוכיח את שלילת סעיף ג׳:

$$\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{Z} \exists z \in \mathbb{Z} . \neg(-y < zx < y)$$

נראה ש- $x = 1$ מקיים

$$\forall y \in \mathbb{Z} \exists z \in \mathbb{Z} . \neg(-y < zx < y)$$

אכן, יהי $y \in \mathbb{Z}$. צריך להראות ש-

$$\exists z \in \mathbb{Z} . \neg(-y < zx < y)$$

נראה ש- $z = y$ מקיים

$$\neg(-y < zx < y)$$

אכן, במקרה זה $zx = y$, ולכן כתוב שם $\neg(-y < y < y)$, וזה באמת נכון (כי $y < y$ לא נכון).

[הערה: שימו לב לסדר – כלומר את z אפשר לתלות ב- y, אבל את x לא.]

6. *סקיצה בלבד* ניתן להביע יחידות על ידי "אם יש שניים כאלו אז הם זהים". כלומר, צריך להוכיח לכל אוסף קבוצות $\mathcal{F}$ את הטענה הבאה "לכל $x, y \in \mathcal{F}$ שהם גדולים ביותר (מכילים כל קבוצה באוסף) מתקיים $x = y$", או בסימנים:

$$\forall y \in \mathcal{F} \forall z \in \mathcal{F} \,.\, \big((\forall x \in \mathcal{F} \,.\, x \subseteq y) \wedge (\forall x \in \mathcal{F} \,.\, x \subseteq z)\big) \to y = z$$

רעיון ההוכחה הוא שההנחה קובעת בפרט כי $z \subseteq y$ וגם $y \subseteq z$ - נסו להשלים את הפרטים.

חלק ג' - תוספות

1. [רמז: היזכרו במוסר השכל מתרגיל 2.]

א. נראה שהטענה נכונה. תהי $L \subseteq S \times C$. נניח כי $\exists w \in C \forall z \in S \,.\, (z, w) \in P$, ועלינו להראות כי

$$\forall x \in S \exists y \in C \,.\, (x, y) \in L$$

יהי $x \in \mathbb{R}$. עלינו להראות ש-

$$\exists y \in C \,.\, (x, y) \in L$$

לפי ההנחה, ניקח את $y = w$ שעבורו מתקיים $\forall z \in S \,.\, (z, w) \in L$. עלינו להראות כי

$$(x, w) \in L$$

ואכן, $(z, w) \in L$ מתקיים לכל $z \in S$, בפרט מתקיים עבור $z = x$.

ב. נראה שהטענה לא נכונה, כלומר קיימת $L \subseteq S \times C$ עבורה הגרירה לא מתקיימת, כלומר עבורה $\forall x \in S \exists y \in C \,.\, (x, y) \in L$ נכונה, אך $\exists w \in C \forall z \in S \,.\, (z, w) \in L$ אינה נכונה, כלומר שלילתה $\forall w \in C \exists z \in S \,.\, (z, w) \notin L$ נכונה.

ניקח $L = \{(s_i, c) | [(\exists k \in \mathbb{Z} . i = 2k) \to c = R] \wedge [(\neg \exists k \in \mathbb{Z} . i = 2k) \to c = G]\}$, כלומר הסטודנטים במקומות הזוגיים מחבבים רק אדום ובמקומות האי-זוגיים רק ירוק.

אכן, לכל $x \in S$ קיים $y \in C$ כך ש- $(x, y) \in L$ (ל- x במקום זוגי יש אדום, ואחרת הוא במקום אי-זוגי ויש לו ירוק). מצד שני, לכל $w \in C$ יש $z \in S$ כך ש- $(z, w) \notin L$ ($(s_1, R), (s_2, G), (s_1, B) \notin L$). בכך הראנו שהטענה אכן שגויה.

[אתגר: נסו לאפיין לאילו S ו- C סעיף א' נותר נכון וסעיף ב' נותר שגוי (אינסופיות, ריקות, וכו').]

[[לשאלות 2 ו- 3 לא ניתן פתרונות. בחדו"א תתעסקו עם מושגים אלו לעומק.]]

אינדוקציה חזקה - פתרונות

1. נגדיר את סדרת פיבונאצ'י באופן הבא $\begin{cases} F_0=0, F_1=1 \\ F_{n+2}=F_{n+1}+F_n \end{cases}$

האיברים הראשונים בסדרה הם: ...,0,1,1,2,3,5,8,13. הוכיחו כי $F_n=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$ כי לכל $n\geq 0$

כאשר $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ו- $\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

ראשית, נראה את בסיס האינדוקציה עבור $n=0,1$. אכן,

ראשית, נראה את בסיס האינדוקציה עבור $n=4$. אכן,

$$F_0=\frac{\alpha^0-\beta^0}{\alpha-\beta}=0$$

$$F_1=\frac{\alpha^1-\beta^1}{\alpha-\beta}=1$$

כעת נעבור לשלב האינדוקציה. מוכיחים כי לכל k טבעי מתקיים $P_1,...,P_k \Rightarrow P_{k+1}$. כלומר, מוכיחים

שאם $P_1,...,P_k$ נכון אז גם P_{k+1} נכון. נניח אפוא ש- $P_1,...,P_k$ נכון, כלומר, $F_s=\dfrac{\alpha^s-\beta^s}{\alpha-\beta}$ לכל

$1\leq s\leq k$. נרצה להוכיח ש-P_{k+1} נכון, כלומר $F_{k+1}=\dfrac{\alpha^{k+1}-\beta^{k+1}}{\alpha-\beta}$. נשים לב שהגדרת סדרת פיבונאצי

ומהנחת האינדוקציה מתקיים מתקיים:

$$F_{k+1}=F_{k-1}+F_k=\frac{\alpha^{k-1}-\beta^{k-1}}{\alpha-\beta}+\frac{\alpha^k-\beta^k}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha^{k-1}-\beta^{k-1}+\alpha^k-\beta^k}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha^{k+1}(\alpha^{-2}+\alpha^{-1})-\beta^{k+1}(\beta^{-2}+\beta^{-1})}{\alpha-\beta}$$
$$=\frac{\alpha^{k+1}-\beta^{k+1}}{\alpha-\beta}$$

כנדרש. הושלם שלב האינדוקציה. לפי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

2. הוכיחו שכל מספר גדול מ-12 הוא סכום של 4ים ו5ים (שימו לב לבסיס האינדוקציה)

ראו
https://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_induction#Example:_forming_dollar_sums_by_coins

3. לכל קבוצה סופית של מספרים קיים איבר קטן ביותר.

ראשית, עבור קבוצה בת איבר אחד הטענה ברורה. נראה את בסיס האינדוקציה עבור $n=2$. אכן, אם

הקבוצה היא $A=\{a,b\}$ ניקח $\min\{a,b\}$ (בדומה לפרדוקס הסוסים, ראו המשך)

כעת נעבור לשלב האינדוקציה. מוכיחים כי לכל k טבעי מתקיים $P_1,...,P_k \Rightarrow P_{k+1}$. כלומר, מוכיחים

שאם P_k נכון אז גם P_{k+1} נכון. נניח אפוא ש- P_k נכון, כלומר, לקבוצה בעלת פחות/בדיוק k איברים יש

איבר קטן ביותר. נוכיח שלקבוצה בעלת k+1 איברים יש איבר קטן ביותר. תהי A קבוצה בת k+1 איברים. נחלק אותה לשני חלקים לא ריקים (כיוון שהתחלנו מ-k=2 ניתן לעשות זאת). בכל אחד מהמחלקים יש פחות מ-k איברים, לכן מהנחת האינדוקציה בכל אחד מהם יש איבר קטן ביותר, ניקח את הקטן מבין שניהם ונקבל שגם בקבוצה הגדולה יש איבר קטן ביותר.