קורס הכנה למבחן סיווג במתמטיקה-חוברת תרגילים

מחבר: צחי חזן

עדכון אחרון: 17/5/2020

תוכן העניינים:

* עזר בכתיבה: לאוניד וישנסקי

נושא 1 – תורת הקבוצות

מהי קבוצה?

קבוצה היא אובייקט שאליו שייכים אובייקטים אחרים

קבוצה מוגדרת על פי האובייקטים השייכים אליה.

אם אובייקט x שייך לקבוצה A נסמן $x \in A$ אחרת, נסמן $x \notin A$.

קבוצות הן שוות כאשר הן מכילות את אותם האיברים. כלומר $\mathrm{A} = \mathrm{B}$ אם מתקיים $x \in A$ אם"ם $x \in B$.

דגש: קבוצות עם תיאור זהה חייבות להיות זהות, אך קבוצות עם תיאור שונה לא חייבות להיות שונות! למשל, קבוצת בני האדם זהה לקבוצת בני האדם שהדם שלהם אדום.

סימוני קבוצות

קבוצות סופיות ניתן לסמן על ידי רשימה של איבריה, והסימון המקובל הוא רשימה מופרדת בפסיקים בתוך סוגריים מסולסלים.

$$B = \{car, \{2, c\}\} \qquad A = \{car, 2, c\}$$

שאלות:

1. האם 2 נמצא בקבוצות אלו?
2. האם $\{2, c\}$ נמצא בקבוצות אלו?
3. כמה איברים בכל קבוצה?
4. האם סדר כתיבת האיברים חשוב?

תשובות:

1. כן ב A ולא ב B.
2. כן ב B ולא ב A.
3. 3 ב A ו2 ב B.
4. לא.

אם הקבוצה אינסופית, הסימון לעיל בעייתי - איך נרשום אינסוף איברים? תחילה נכיר בכך שאנו מסוגלים לתאר קבוצות אינסופיות מסוימות בשפה טבעית. למשל, קבוצת המספרים השלמים. כדי לסמן קבוצה אינסופית אחרת, משתמשים בתנאי לוגי

מוגדר היטב (שכולם יבינו באותו אופן) לברור איברים מתוך קבוצה גדולה יותר. למשל, מקובל לסמן את כל המספרים השלמים ב $\mathbb{Z}$ ואז ניתן להגדיר את הקבוצה האינסופית:

$$\{2n \mid n \in \mathbb{z} \lor n = 13\}$$

בצד שמאל כתובה השבלונה (צורת האברים בקבוצה) ובצד ימין התנאי - האיברים המקיימים את התנאי הם אלו שנמצאים בקבוצה שהגדרנו. ניתן גם לרשום

$$\{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$$

וכולם מבינים אילו איברים שם ואילו לא, אך זהו רישום פחות מדויק ופחות גמיש.

ישנן קבוצות מסוימות בעלות סימנים מוסכמים:

הקבוצה הריקה $\emptyset$

טבעיים $\mathbb{N}$ - השלמים החיוביים

שלמים $\mathbb{Z}$

רציונליים $\mathbb{Q}$ מספרים שהם מנה של שני שלמים

ממשיים $\mathbb{R}$ כל המספרים על הציר (בנייה לא פשוטה על ידי השלמה "חורים" של סדרות ברציונליים)

מרוכבים $\mathbb{C}$ - מספרים מהצורה $a + bi$ כאשר $a, b \in \mathbb{R}$ ו $i^2 = -1$. נלמד עליהם בהמשך

קטעים $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ הסוגר המרובע משמעותו "כולל", העגול משמעותו "לא כולל".
קרן ימנית / שמאלית $(-\infty, b)$ / $[a, \infty)$

יחס הכלה

מאחר וקבוצות מוגדרות על פי שייכות, הדרך הטבעית להשוות בין קבוצות היא הכלה. נאמר שקבוצה A מוכלת בקבוצה B ונסמן $A \subseteq B$ אם לכל $x \in A$ מתקיים ש$x \in B$.

למשל, קבוצת ערי הבירה בעולם מוכלת בקבוצת כל ערי העולם. דוגמה נוספת, קבוצת המספרים השלמים אינה מוכלת בקבוצת המספרים החיוביים, ולהפך.

באופן כללי, כיצד נוכיח ש $B \subseteq A$?

לפי הגדרה, אנו טוענים שלכל איבר $x \in A$ מתקיים $x \in B$. לכן צריך להראות זאת לכל אחד מהאיברים. אך כאשר אנו חושבים על כך שכל עיר בירה היא עיר, אנו לא באמת עוברים על כל ערי הבירה ובודקים אחת-אחת שמדובר בעיר. כמו כן, אם A אינסופית זה לחלוטין לא אפשרי! השיטה היא להוכיח למספר רב של מקרים בו זמנית, על ידי כך שלוקחים איבר כלשהו בA, קוראים לו x בלי לומר מי הוא, ורק על פי הידע שהוא נמצא בA מוכיחים שהוא נמצא בB.

לדוגמא: כדי להוכיח

$$\{4n \mid n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

התהליך נראה כך:

יהי $x \in \{4n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. אז קיים $n \in \mathbb{Z}$ כך ש $x = 4n$. לכן $x = 2 \cdot 2n$. בפרט אם נסמן $m = 2n$ נקבל כי קיים $m \in \mathbb{Z}$ כך ש $x = 2m$. כלומר $x \in \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

זה מרגיש מלאכותי ואולי מעט טיפשי, אך בהמשך נעסוק בקבוצות שתיאורן יותר מורכב. שימו לב שאם $B \subseteq A$ וגם $A \subseteq B$ אז יש להם אותם איברים, כלומר $A = B$. ההפך גם נכון.

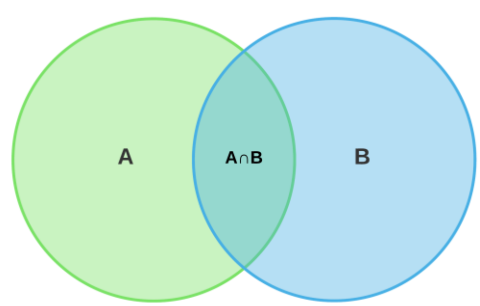
פעולות

ניתן ליצור מקבוצות נתונות קבוצות חדשות. יש כמה פעולות בינאריות עיקריות.

טבלת הפעולות:

שם פורמלי	סימן	דוגמא לשימוש	אברי הקבוצה
חיתוך	$\cap$	$A \cap B$	האיברים שנמצאים גם ב A וגם ב B
איחוד	$\cup$	$A \cup B$	האיברים שנמצאים ב A או ב B
הפרש	$\setminus$	$A \setminus B$	האיברים שנמצאים ב A ולא ב B
הפרש סימטרי	Δ	$A \Delta B$	האיברים שנמצאים ב A ולא ב B או האיברים שנמצאים ב B ולא ב A

דיאגרמת ון



משלים של קבוצה

לעיתים קרובות נניח שהקבוצות עליהם אנו מדברים מוכלות בקבוצה גדולה כשלהי, למשל U.

עבור תת קבוצה $A \subseteq U$, המשלים של A הוא $A^c = U \setminus A$.

לדוגמא:

אם $U = \mathbb{R}$ אז

$$\{x \mid x < 4\}^c = \{x \mid x \geq 4\}$$

מכפלה קרטזית

בקבוצה עם שני אברים אין חשיבות לסדר הופעת האיברים.

נגדיר זוג סדור - (a, b) עצם מסוג חדש אשר מורכב משני איברים בעל חשיבות לסדר הופעתם.

מתקיים

$$(a.b) = (c, d) \quad \Leftrightarrow \quad a = c \ \wedge b = d$$

המכפלה הקרטזית של A, B הינה קבוצת כל הזוגות הסדורים בהם האיבר הראשון מ A והאיבר השני מ B

$$A \times B = \{(a, b) \ \mid a \in A \ \wedge b \in B\}$$

לדוגמא: המישור הממשי = $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

תורת הקבוצות - תרגילים

חלק א – סימון קבוצות ושייכות

1. אילו מהטענות הבאות נכונות?

א. $1 \in \{1\}$
ב. $5 \in \mathbb{N}$
ג. $5 \in \{\mathbb{N}\}$
ד. $17 \in \{0,2,4,6,\dots\}$
ה. $-5 \in \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 > 0\}$
ו. $\emptyset \in \emptyset$
ז. $\emptyset \in \{\emptyset\}$
ח. $\emptyset \in \{\{\emptyset\}\}$
ט. $\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$

חלק ב – הכלה ושייכות

1. קבעו האם $A \subseteq B$ כאשר:

א. $A = 1, B = \mathbb{N}$
ב. $A = \{3,4\},\ B = \mathbb{Z}$

2. קבעו האם $A \subseteq B$ והאם $A \in B$ כאשר:

א. $A = \emptyset, B = \{\emptyset\}$
ב. $A = \emptyset, B = \emptyset$
ג. $A = \{\emptyset\}, B = \{\emptyset\}$
ד. $A = \emptyset, B = \{\{\emptyset\}\}$
ה. $A = \emptyset, B = \{x | x \subseteq \mathbb{N}\}$

3. הוכיחו שאם A, B, C קבוצות ומתקיים $A \subseteq B, B \subseteq C$ אז $A \subseteq C$.
4. מצאו אילו יחסי הכלה יש בין הקבוצות הבאות: $\emptyset, \mathbb{Q}, \mathbb{N}, \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}$.

חלק ג – פעולות על קבוצות ודיאגרמת ון

1. בשאלה זו A, B, C הן קבוצות. ציירו דיאגרמות ון מתאימות עבור:

א. $A \cup B \cup C$
ב. $A \cap B \cap C$
ג. $A \cap (B \cup C)$
ד. $(A \cup B)\backslash C$
ה. $(A \Delta B) \cap C$
ו. $(A \cup B)\backslash(A \cap B)$

2. חשבו את $A \cap B, A \cup B, A\backslash B$ כאשר:

א. $A = \{1,2,3\},\ B = \{2,3,6,7\}$
ב. $A = (1,2),\ B = [1,2]$
ג. $A = \mathbb{N},\ B = \emptyset$
ד. $A = [1,5],\ B = [2,6]$

3. עבור קבוצות A, B הוכיחו:

א. $A \subseteq A \cup B$
ב. $A \cap B \subseteq A$
ג. $A\backslash B \subseteq A$

חלק ד – שוויון קבוצות

1. הוכיחו שעבור קבוצות A, B, C מתקיים:

א. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
ב. $(A\cup B)\backslash(A\cap B)=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$
ג. $A\backslash(B\cup C)=(A\backslash B)\cap(A\backslash C)$

2. הוכיחו את השוויון הבא:

$$\{x\in\mathbb{R}\mid x^2>0\}=\mathbb{R}\backslash\{0\}$$

3. כמה קבוצות ריקות קיימות? האם יתכן שיש יותר מקבוצה ריקה אחת?

חלק ה – משלים של קבוצה

בחלק זה מניחים שכל הקבוצות מוכלות בקבוצה U כלשהי, והמשלים נלקח ביחס לקבוצה U.

1. הוכיחו שלכל קבוצה מתקיים $(A^c)^c=A$.
2. הוכיחו שלכל שתי קבוצות מתקיים $A\subseteq B$ אם ורק אם $B^c\subseteq A^c$.
3. עבור קבוצות A,B כלשהן, הוכיחו את השוויונות הבאים:

א. $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$

ב. $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$

הערות:

א. השוויונות הנ"ל נקראים כללי דה-מורגן.

ב. אם נבצע את התרגום הבא:

קבוצה A לטענה A.

חיתוך של קבוצות לקוניונקציה לוגית (כל הטענות נכונות).

איחוד של קבוצות לדיסיונקציה לוגית (לפחות אחת מהטענות נכונה).

משלים של קבוצה A לשלילה של טענה A.

אז נקבל כי כללי דה-מורגן (שהיה לוגיקן) יהפכו לכללים בלוגיקה (שבה נוסחו מלכתחילה על ידי דה-מורגן). למשל: "המשלים של חיתוך שווה לאיחוד המשלימים" יתורגם לשפת הלוגיקה כ: השלילה של הטענה "כל הטענות נכונות" היא הטענה "לפחות אחת מהטענות אינה נכונה". ובדומה לכך כלל דה-מורגן השני .

בשפת הלוגיקה כללי דה-מורגן נשמעים מובנים מאליהם.

חלק ו – מכפלה קרטזית

1. חשבו את $\{1,2,3\}\times\{1,4,5\}$.
2. תהיינה A,B קבוצות לא ריקות. הוכיחו שמתקיים $A\times B=B\times A$ אם ורק אם $A=B$.
3. הוכיחו או הפריכו:

א. לכל A,B,C מתקיים $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$.
ב. לכל A,B,C,D מתקיים $(A\cup B)\times(C\cup D)=(A\times C)\cup(B\times D)$.

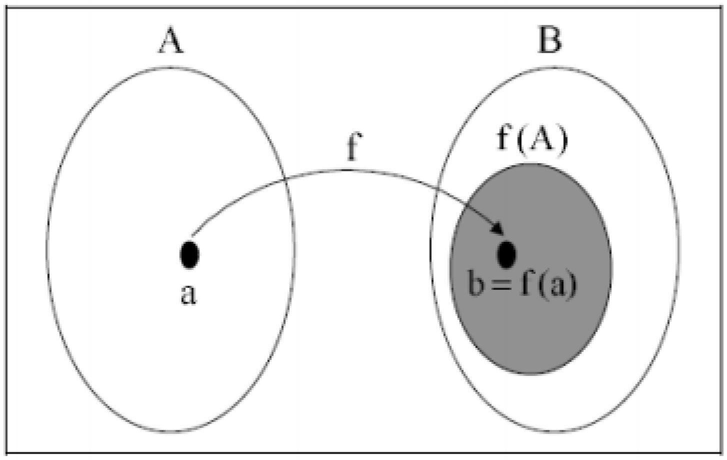
נושא 2 – פונקציות

הקדמה

הגדרה תהיינה A , B שתי קבוצות. נאמר כי f היא **פונקציה** מהסוג $A \to B$, ונסמן זאת $f: A \to B$, אם לכל $a \in A$ מתקיים $f(a) \in B$.

נקרא ל- A **התחום** ול- B **הטווח** (של f). ניתן לתאר כיצד פעולת הפונקציה במגוון דרכים, לדוגמא $f(x) = 1 + x$, $x \mapsto 1 + x$, ו- "מוסיפים ל- 1 את הקלט" כולם מתארים את אותה הפעולה. אפילו בטבלאות (או קבוצת זוגות סדורים) משתמשים לעיתים. [בדרך כלל נשתמש בשני בסימונים יחד על מנת להבהיר את סוג הפונקציה ואופן פעולתה.]

הגדרה $f(a)$ היא **התמונה** של a, וכן a היא **המקור** של $f(a)$.



דוגמה $B = \{1,2\}$, $A = \{1,2,3\}$, $f: A \to B$. נתאר את פעולת הפונקציה ע"י $f = \{(1,2), (2,1), (3,2)\}$. זוהי פונקציה. לעומתה $g = \{(1,1), (1,2), (2,2)\}$ אינה פונקציה. [שתי בעיות – האחת היא שיש מקור שיש לו יותר מ-2 תמונות, השנייה היא שיש מקור שאין לו תמונה.]

נשים לב כי לפי הגדרת הפונקציה לכל איבר בתחום קיימת וייחודית תמונה בטווח, אולם לאיבר בטווח עלולה להיות כל כמות של מקורות בתחום. [זהו למעשה התנאי הנדרש מקבוצת זוגות סדורים על מנת שתתאר פונקציה.]

למחשבה האם יש משמעות לפונקציה $f: A \to B$ כאשר A או B ריקות?

הגדרה תהיינה A , B שתי קבוצות, ותהיינה $f: A \to B$. עבור $X \subseteq A$, התמונה של X היא

$$f[X] := \{f(x) \in B | x \in X\} = \{b \in B | \exists x \in X. b = f(x)\}$$

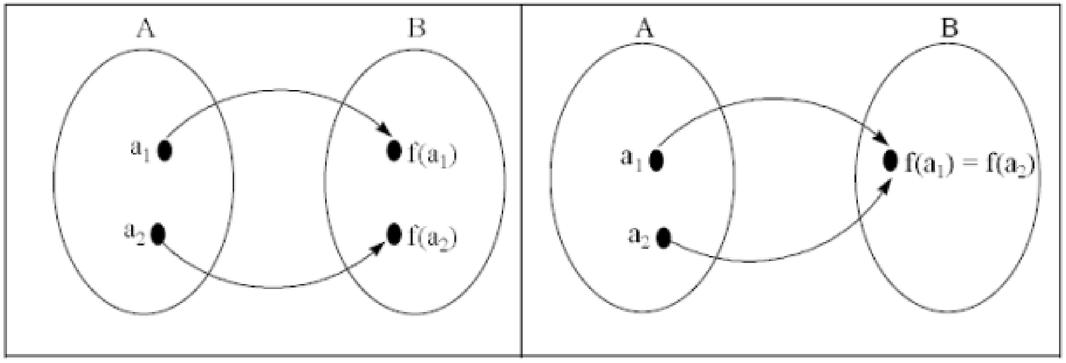
עבור $Y \subseteq B$, התמונה ההפוכה של Y היא

$$f^{-1}[Y] := \{a \in A | f(a) \in Y\} = \{a \in A | \exists y \in Y. f(a) = y\}$$

שימו לב שאנו משתמשים בסימון הפונקציה f מעט ברשלנות. [נשתדל להקפיד על הסוגריים המרובעים.]

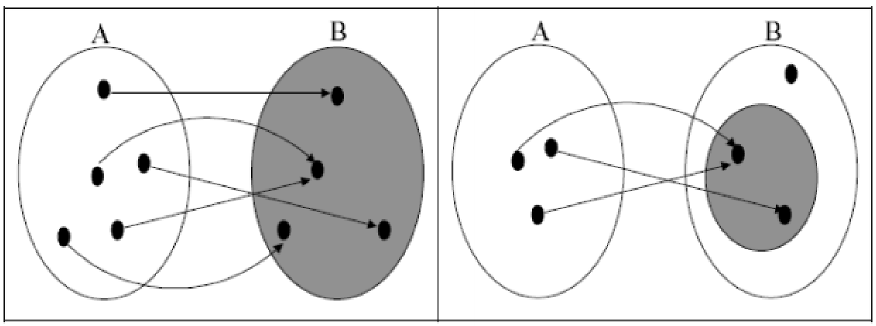
הגדרה תהי $f: A \to B$. [נפסיק לציין ש- A, B קבוצות כלשהן – נניח מעתה שהדבר ברור מהקשר.]

1. f נקראת **חד-חד ערכית** (חח"ע) אם לכל שני איברים שונים $a_1, a_2 \in A$ מתקיים $f(a_1) \neq f(a_2)$.
באופן שקול: אם $f(a_1) = f(a_2)$ אז $a_1 = a_2$.



תרשים 1.4.2: מימין פונקציה שאינה חח"ע ומשמאל פונקציה חח"ע.

2. f נקראת **על** אם לכל $b \in B$ קיים (ואולי לא יחיד) $a \in A$ כך ש- $f(a) = b$.



תרשים 1.4.3: מימין פונקציה שאינה על, ומשמאל פונקציה על.

דוגמה

1. תהי $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ הפונקציה המוגדרת ע"י $f(x) = x + 1$.
התחום של הפונקציה הוא $\mathbb{Z}$ וגם הטווח שלה הוא $\mathbb{Z}$. פונקציה זו הנה על כי לכל $y \in \mathbb{Z}$ קיים $x \in \mathbb{Z}$ כך ש- $f(x) = y$ (דהיינו $x = y - 1$). פונקציה זו היא גם חח"ע מאחר ש:
$$f(s) = f(t) \Rightarrow\ s + 1 = t + 1\ \Rightarrow\ s = t$$
כעת נתבונן בפונקציה $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ הפועלת על פי אותו כלל. נשים לב כי אין אף איבר בתחום שממנו נקבל 0, לכן f במקרה הזה אינה על. היא כן חח"ע מאותם נימוקים קודמים.
2. הפונקציה הקבועה: יהיו A, B קבוצות ויהי $b_0 \in B$. אזי $f: A \to B$ המוגדרת ע"י $f(a) = b_0$ לכל $a \in A$ תיקרא **פונקציה קבועה.**
3. פונקציית הזהות: תהי X קבוצה כלשהי. הפונקציה $Id: X \to X$ המוגדרת ע"י $Id(x) = x$ נקראת **פונקציית הזהות** על X.
4. תהיינה $A \subseteq X$ נגדיר פונקציה $\chi_A: X \to \{0,1\}$ ע"י:
$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$
פונקציה הזו נקראת **האינדיקטור** (מעל X) של הקבוצה A. [לעיתים קרובות $X = \mathbb{R}$.]
5. נגדיר סימן $[n] = \{1,2,\ldots,n\}$. אז $f: [n] \to [n]$ חח"ע ועל תיקרא **פרמוטציה** או **תמורה** על A. [במקרה של קבוצות סופיות באותו גודל בתחום ובטווח אז הפונקציה תהיה חח"ע אמ"ם היא על.]

פעולות

השריית פעולה מהטווח – מקרה פרטי – אריתמטיקה של פונקציות ממשיות

בהינתן $X,Y\subseteq\mathbb{R}$ קבוצות נרחיב את 4 פעולות החשבון מהממשיים לפונקציות.

דוגמה תהיינה פונקציות $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. נגדיר את הפונקציה $f-g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ע"י

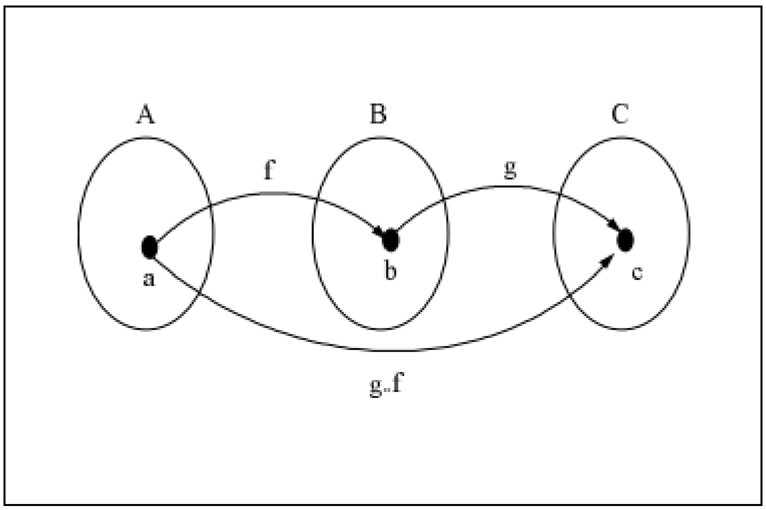
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$

כלומר השרנו את פעולת החיסור בקבוצת הממשיים על פונקציות מאותו סוג שטווחן הוא הממשיים ע"י כך שמבצעים את הפונקציות ולבסוף מחסרים.

הרכבה

הגדרה תהיינה A,B,C קבוצות ותהיינה $g:B\to C$, $f:A\to B$ פונקציות. **ההרכבה** של g ו- f היא הפונקציה $h:A\to C$ המוגדרת ע"י $h(a)=g(f(a))$ לכל $a\in A$. מסמנים זאת ע"י $h=g\circ f$.

טענה פעולת ההרכבה היא אסוציאטיבית.



תרשים 1.4.4: הרכבה של f ו- g.

דוגמה

1. תהי X קבוצת כל בני האדם (בעלי אבא וטלפון לדייקנים). תהי $f:X\to X$ פונקציה שמקבלת אדם ומחזירה את אביו. תהי $g:X\to\mathbb{N}$ פונקציה שמקבלת אדם ומחזירה את מספר הטלפון שלו. אז $g\circ f$ תחזיר אדם ותחזיר את מספר הטלפון של אביו.
2. תהיינה $f,g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ פונקציות המוגדרות ע"י $g(x)=2x+5$, $f(x)=4x+3$. אזי:

$$(g\circ f)(x)=g\big(f(x)\big)=g(4x+3)=2(4x+3)+5=8x+11$$
$$(f\circ g)(x)=f\big(g(x)\big)=f(2x+5)=4(2x+5)+3=8x+23$$

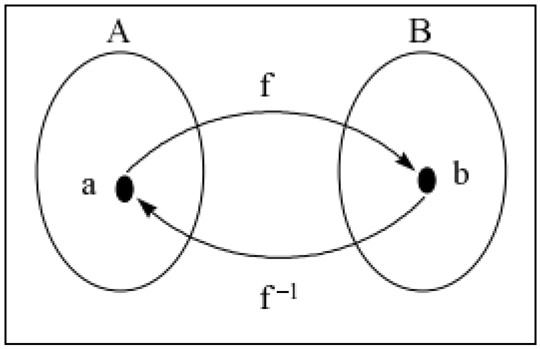
מסקנה פעולת הרכבה איננה סימטרית.

הפיכות

הגדרה תהיינה $f: A \to B$. הפונקציה f **הפיכה** אם קיימת פונקציה $g: B \to A$ עבורה $g \circ f$ היא פונקציית הזהות על A ו- $f \circ g$ היא פונקציית הזהות על B. [כלומר שלכל $a \in A$ מתקיים $(g \circ f)(a) = a$ ולכל $b \in B$ מתקיים $(f \circ g)(b) = b$.] הפונקציה g תיקרא **הפונקציה ההופכית** ל-f ותסומן $g = f^{-1}$.

למה ההופכית – איך אנו יודעים שהיא יחודית? אם גם h הופכית, נתבונן ב-

$$g = g \circ id_B = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = id_A \circ h = h.$$



תרשים 1.4.5: הפונקציה f והפונקציה ההופכית ל- f.

דוגמה תהי $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ פונקציה המוגדרת ע"י $f(n) = n - 1$. הפונקציה f הפיכה וההופכית שלה היא $f^{-1}: \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{N}$ המוגדרת ע"י $f^{-1}(n) = n + 1$. קל לראות ש- $f^{-1} \circ f = id_{\mathbb{N}}$ ו- $f \circ f^{-1} = id_{\mathbb{N} \cup \{0\}}$.

משפט f הפיכה אמ"מ היא חח"ע ועל.

צמצום של פונקציות

בהינתן פונקציה $f: X \to Y$ נגדיר את **הפונקציה המצומצמת** על $A \subseteq X$ ע"י אותו חוק שמגדיר את f אך עכשיו $f: A \to Y$. נסמן את הפונקציה המצומצמת ב- $f|_A$.

דוגמה הפונקציה $f: \mathbb{R} \to [0, \infty)$ המוגדרת ע"י $f(x) = x^2$ איננה חח"ע אבל הפונקציה המצומצמת $f|_{[0,\infty)}$ היא כן חח"ע.

 צחי חזן

פונקציות – תרגילים

חלק א' – הפונקציה לבדה

1. רשמו את התחום, הטווח, והתמונה עבור הפונקציות הבאות.
בנוסף, עבור כל פונקציה – ציינו האם חח"ע והאם על.
   א. $f(x)=x+1\ ,\ f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$.
   ב. $f(x)=2x\ ,\ \ f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$.
   ג. H קבוצת כל בני האדם, $f:H\to H$ היא פונקציה שמקבלת אדם ומחזירה את אביו.
   ד. H קבוצת כל בני האדם, $f:H\to\mathbb{Z}$ היא פונקציה שמקבלת אדם ומחזירה את תעודת הזהות שלו.
   ה. פונקציית הזהות על X (כאשר X קבוצה כלשהי).
   ו. הפונקציה האופיינית עבור $X\subset\mathbb{Q}$ (X קבוצה כלשהי).
   ז. הפונקציה הקבועה עבור A,B קבוצות כלשהן לא ריקות ועבור $b_0\in B$, אשר מקיימת $f(a)=b_0$ לכל $a\in A$.
   ח. הפונקציה הקבועה עבור A,B כאשר $B=\{b_0\}$ ו-A לא ריקה כלשהי אשר מקיימת $f(a)=b_0$ לכל $a\in A$.
2. רשמו את כל הפונקציות מ־ $\{1,2,3\}$ ל־ $\{1,2\}$. אילו מהן חח"ע? אילו על?
3. תנו דוגמא לפונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ כך ש-
   א. f חח"ע ולא על
   ב. f על ולא חח"ע
4. הוכיחו כי לכל $A,B\subseteq X$ ולכל $f:X\to Y$ מתקיים:
   א. $f[A\cup B]=f[A]\cup f[B]$
   ב. $f[A\cap B]\subseteq f[A]\cap f[B]$
5. הוכיחו כי לכל $A,B\subseteq Y$ ולכל $f:X\to Y$ מתקיים:
   ג. $f^{-1}[A\cup B]=f^{-1}[A]\cup f^{-1}[B]$
   ד. $f^{-1}[A\cap B]=f^{-1}[A]\cap f^{-1}[B]$
6. נתונה A קבוצה בת 151 איברים.
   א. מהו המספר **הגדול** ביותר של איברים שקבוצה B יכולה להכיל אם ידוע כי קיימת פונקציה מ- A **על** B?
   ב. מהו המספר **הגדול** ביותר של איברים שקבוצה B יכולה להכיל אם ידוע כי קיימת פונקציה מ- A **חח"ע** אל B?
   ג. מהו המספר **הקטן** ביותר של איברים שקבוצה B יכולה להכיל אם ידוע כי קיימת פונקציה מ- A **על** B?
   ד. מהו המספר **הקטן** ביותר של איברים שקבוצה B יכולה להכיל אם ידוע כי קיימת פונקציה מ- A **חח"ע** אל B?

חלק ב' – פעולות בין פונקציות

1. תהיינה $f: A \to B \quad , \quad g: B \to C$ פונקציות. הוכיחו:
   א. אם f, g חח"ע אז $g \circ f$ חח"ע
   ב. אם f, g על אז $g \circ f$ על
2. נגדיר $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ע"י $f(x) = x^2 \, , \; g(x) = 2x$. רשמו את $f \circ g \; , \; g \circ f$
3. תהיינה $f, g, h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרות ע"י: $h(x) = -5x + 1 \quad , \quad g(x) = 3x - 1 \quad , \quad f(x) = x^2 + 2$. תארו באמצעות נוסחאות את ששת הפונקציות הבאות:
   $$h \circ f \quad , \quad f \circ h \quad , \quad h \circ g \quad , \quad g \circ h \quad , \quad g \circ f \quad , \quad f \circ g$$
4. הוכיחו/הפריכו לגבי כל אחת מהפונקציות הבאות את קיומן של כל אחת מן התכונות הבאות: חח"ע, על, והפיכה. כמו כן, אם הפונקציה הפיכה מצאו הופכית:
   א. $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \quad , \quad f(n) = n^2 + 1$
   ב. $f: \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{N} \cup \{0\} \quad , \quad f(n) = n^3 - n$
   ג. $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \quad , \quad f(x) = \frac{17}{5}x - 2$
   ד. $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p+1}{q} \quad , \quad f: \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{Q}_+$ כאשר $\frac{p}{q}$ שבר מצומצם ($p, q \in \mathbb{N}$ ללא גורם משותף מעל 1)
   הערה: ההוכחה כי הפונקציה הינה על היא קשה. חשבו על זה קצת ונסו להבין את הפתרון.
   ה. $f(n) = \begin{cases} n, & \exists k \in \mathbb{N} \cup \{0\} . n = 2k + 1 \\ n + 2, & \exists k \in \mathbb{N} \cup \{0\} . n = 2k \end{cases} \quad , \quad f: \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{N}$
5. תהיינה $A = \{1,2,3\} \quad , \quad B = \{1,2,3,4\} \quad , \quad f: A \to B \quad , \quad g: B \to A$. האם ייתכן ש- $f \circ g$ היא הזהות על B? האם ייתכן ש- $g \circ f$ היא הזהות על f?
6. נסמן ב- χ_A את האינדיקטור של A. הוכיחו: $\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$.
7. בטאו את $\chi_{A \triangle B}, \; \chi_{A \setminus B}, \; \chi_{A \cup B}$ ע"י $\chi_B \; , \; \chi_A$ (כלומר אין לנו גישה ישירה לקבוצות A, B).

נושא 3 – אי שוויונות

פעולות באי שוויונות

הפעולות הבסיסיות באי שוויונות (בניגוד לשוויונות ממש) הן כדלקמן:

1. אם $a < b$ אז לכל $c \in \mathbb{R}$ מתקיים $a + c < b + c$.
2. אם $a < b$ ו- d חיובי, אז גם $ad < bd$ אם d שלילי, אז $ad > bd$.
3. אם $a < b$ וידוע כי a ו- b חיוביים, אז גם $a^2 < b^2$.

מחוקים אלו, יחד עם הטרנזיטיביות של מספרים ממשיים, נובע גם ש-

1. אם $a < b$ ו- $c < d$ אז גם $a + c < b + d$.
2. אם $0 < a < b$ וגם $0 < c < d$ אז $ac < bd$.

אנו נעסוק באי שוויונות בהן מופיעים משתנים (פרמטרים). פתרון אי שוויון עם פרמטרים פירושו יהיה למצוא את קבוצת הערכים עבורו האי שוויון מתקיים. בשונה מפתרון שוויונות, בדרך כלל הפתרון של אי שוויון יהיה למעשה תחום על הישר הממשי.

טכניקת הפתרון לאי שוויונות היא שונה בהתאם לסוג האי שוויון שאותו אנו מעוניינים לפתור. בשיעור זה נסקור כמה סוגים מרכזיים של אי שוויונות ונדגים את טכניקת הפתרון עבור כל סוג של אי שוויון.

אי שוויונות ממעלה ראשונה

נציג כאן את דרך הפתרון של אי שוויון ממעלה ראשונה, וכן של מערכת של אי שוויונות.

אי שוויון בודד

דוגמא 1:

$$\frac{4(x+2)}{9} - \frac{17-2x}{36} < \frac{2x}{3}$$

מכפילים במכנה המשותף 36 . כמובן שזהו מספר חיובי ולכן אין צורך בשינוי הכיוון של האי שוויון. נקבל:

$$16(x+2) - (17-2x) < 24x$$
$$\Updownarrow$$
$$16x + 32 - 17 + 2x < 24x$$
$$\Updownarrow$$
$$18x + 15 < 24x$$
$$\Updownarrow$$

$$6x > 15$$
$$\Updownarrow$$
$$x > 2.5$$

כלומר עבור כל ערך x שנציב אשר גדול מ 2.5, נקבל כי האי שוויון הינו פסוק אמת.
קבוצת הפתרונות הינה $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 2.5\}$.

דוגמא 2:

$$\frac{x+1}{2} - \frac{x-1}{3} < \frac{x+2}{6}$$

מכפילים ב 6 ומקבלים:

$$3(x+1) - 2(x-1) < x+2$$
$$\Updownarrow$$
$$3x + 3 - 2x + 2 < x + 2$$
$$\Updownarrow$$
$$x + 5 < x + 2$$
$$\Updownarrow$$
$$5 < 2$$

כלומר לאי שוויון זה אין פתרון עבור כל ערך של x. (זה גם יכול לקרות...)
קבוצת הפתרונות הינה הקבוצה הריקה $\emptyset$.

מערכת אי שוויונות

לעיתים עלינו לפתור מערכת של אי שוויונות, ולמצוא את תחום הפתרון המשותף לכולם (בשפה של תורת הקבוצות חיתוך של קבוצת הפתרונות של כל האי שוויונות במערכת).

דוגמא 1:

נתונה המערכת:

$$\begin{cases} \text{(I) } 2x - 6 & \geq & 0 \\ \text{(II) } x - 4 & < & 4 \end{cases}$$

נפתור כל אי שוויון בנפרד ונקבל:

$$\begin{cases} \text{(I) } x & \geq & 3 \\ \text{(II) } x & < & 8 \end{cases}$$

כעת, נסמן את התחומים הרלוונטיים על הציר הממשי.

```
              <----------------------------------o
                  ● ----------------------------------------->
<-+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-->
  0     1     2     3     4     5     6     7     8     9     10
```

כפי שניתן לראות, החיתוך של שני התחומים הנ"ל הינו $3 \leq x < 8$.

אי שוויונות ממעלה שנייה

שיטת הפתרון של אי שוויונות ממעלה שנייה מתבססת על ידע בסיסי בחקירת פרבולות. נרצה תחילה להבין את הפתרונות של המשוואה:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

<u>הפרבולה</u>

נמצא את הפתרונות של השוויון למעלה. נסמן $\Delta = b^2 - 4ac$ (גודל זה נקרא הדסקרימיננטה).

תחילה, נכפיל ב- $4a$ את שני האגפים:

$$4(ax)^2 + 4abx + 4ac = 0$$

כעת, נוסיף לשני האגפים את Δ:

$$4(ax)^2 + 4abx + b^2 = \Delta$$

ומנוסחה מוכרת (ויאטה) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ נקבל:

$$(2ax + b)^2 = \Delta$$

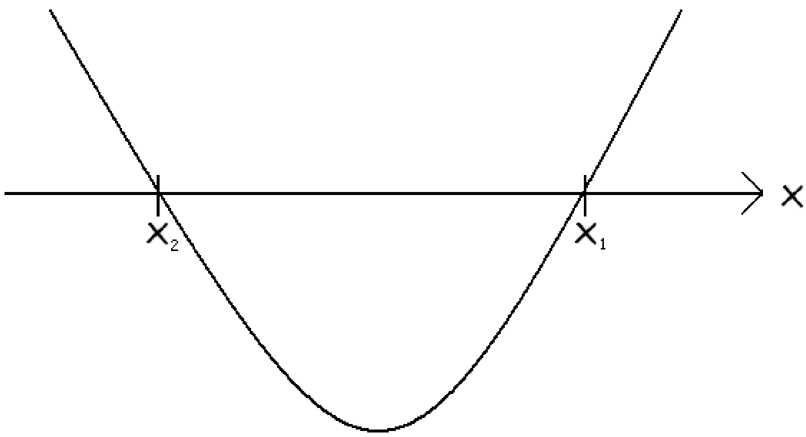
מכאן אפשר לקבל בקלות את הפתרונות של המשוואה הריבועית (עם הנחות מתאימות על Δ

ו- $a \neq 0$ כמובן), להלן:

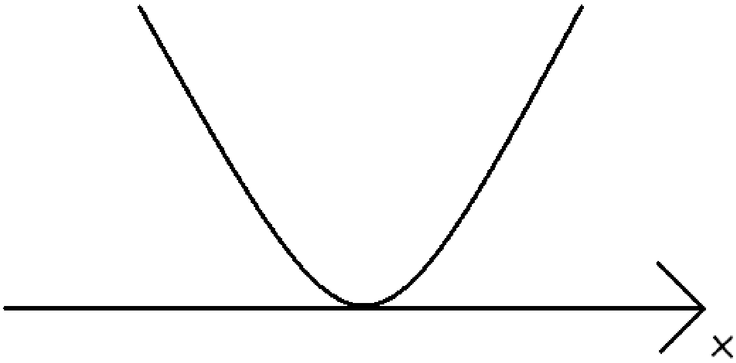
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

נבדיל בין שלושה מקרים:

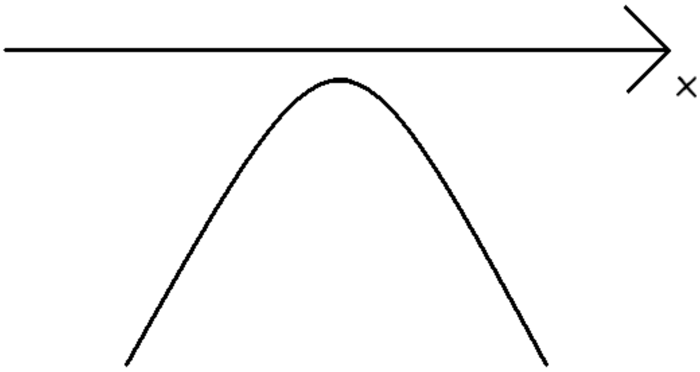
אם $\Delta > 0$, אז למשוואה יש שני פתרונות שונים. הפרבולה נראית כך ($a > 0$):



אם $\Delta = 0$, אז יש פתרון יחיד:



ואם $\Delta < 0$ אז אין פתרון למשוואה (כאן $a < 0$):



פתרון אי שוויונות ממעלה שנייה

נמחיש את שיטת הפתרון על ידי דוגמא:

דוגמא 1:

נפתור את האי שוויון:

$$2x^2 - 8x < -6$$

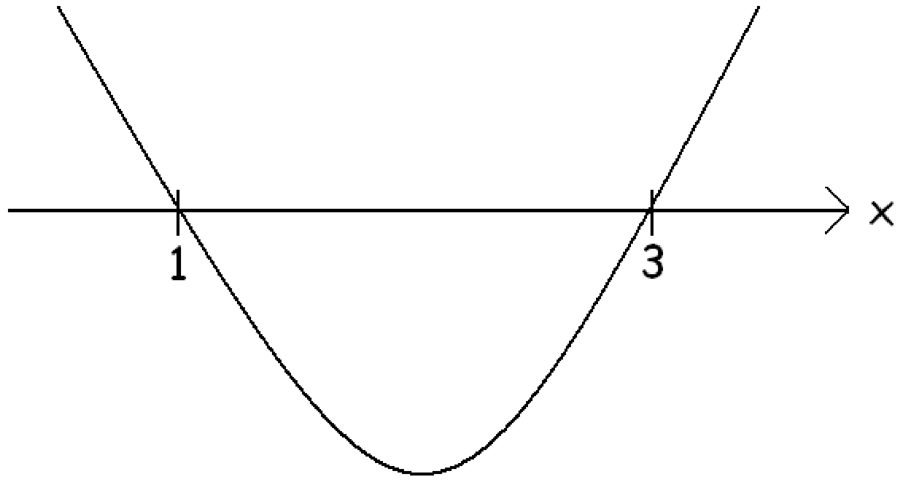
על ידי העברת אגפים ופישוט נקבל:

$$x^2 - 4x + 3 < 0$$

כעת, כשלב עזר, נחשב את הפתרונות של המשוואה $x^2 - 4x + 3 = 0$. אכן:

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = 1{,}3$$

עכשיו, אחרי שמצאנו את השורשים, נוכל לשרטט קירוב גס של הפונקציה (נשים לב ש $a > 0$):



כעת, ניתן לראות שהאי שוויון מתקיים בתחום $1 < x < 3$. בקבוצות $x \in (1,3)$.

לחילופין, אם היינו שואלים מתי מתקיים האי שוויון ההפוך, התחום הרצוי היה $x < 1$ או $x > 3$.
בסימון של קבוצות $x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$.

אי שוויונות רציונליים

למעשה מדובר באי שוויונות עם שברים, וזה כמובן משפיע על קבוצת הפתרונות שלנו (עקרון מנחה אסור לחלק ב0!).

נמחיש כיצד פותרים אי שוויונות מהצורה הזאת על ידי דוגמא:

דוגמא 1:

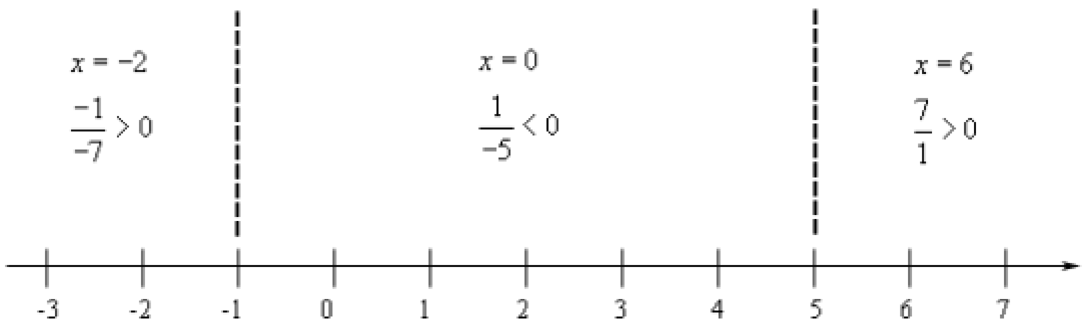
נפתור

$$\frac{x+1}{x-5} \leq 0$$

נבחין, כי בנקודה $x = 5$, האי שוויון בכלל לא מוגדר היטב ולכן לא ייתכן שהנקודה הזאת תהייה בקבוצת הפתרונות שלנו.

עבור כל $x \neq 5$, האי שוויון מוגדר היטב. רק עבור $x = -1$ מתקיים שוויון.

נשרטט את הציר הממשי עם הערכים המדוברים, ונציב ערכי ביניים כדי להבין מהו תחום הפתרון. כפי שמתואר:



מספיק לנו לבדוק ערך אחד בכל תחום מדובר, פשוט כי לא ייתכן שינוי סימן בקטע ביניים

(כדי להיווכח ניתן להניח בשלילה).

כעת אנו מעוניינים בקבוצת הערכים עבורן האי שוויון הוא בעל סימן שלילי, כלומר:

$$-1 \le x < 5$$

(זכרו ש- 5 לא בקבוצת הפתרונות).

סך הכל $x \in [1,5)$.

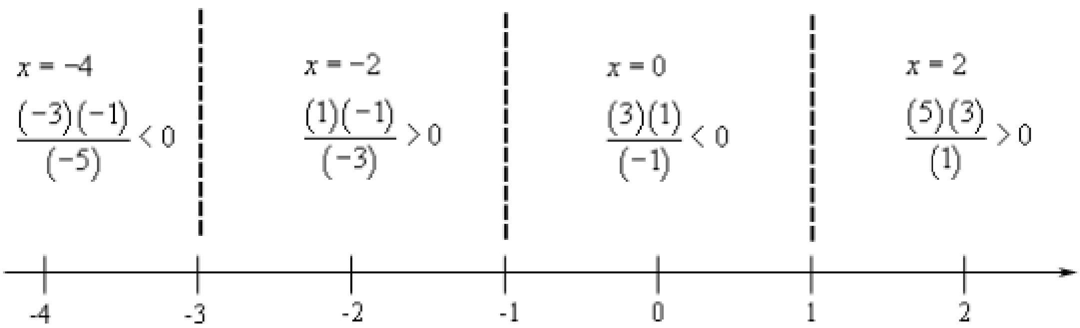
דוגמא 2: נפתור:

$$\frac{x^2+4x+3}{x-1} > 0$$

שוב, $x = 1$ לא בתחום הפתרון, נמצא נקודות התאפסות של המונה:

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = -1, -3$$

ולכן עלינו לבדוק ערכים בין שלושת הנקודות הנ"ל, נשרטט על הציר הממשי:



אני מחפשים ערך חיובי ולכן קבוצת הפתרונות הינה: $(-3,-1) \cup (1,\infty)$.

ערך מוחלט:

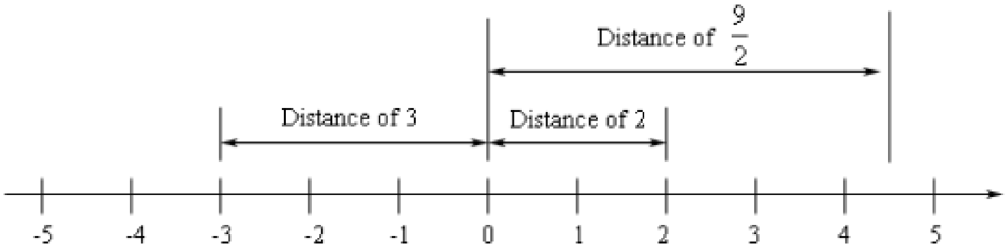
זהו חלק שרלוונטי מאוד לקורסי חדו"א של השנה הראשונה באוניברסיטה.

ערך מוחלט:

תחילה, ניתן הגדרה פורמלית לפונקציה המוכרת:

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \ge 0 \end{cases}$$

כאשר x הינו מספר ממשי כלשהו. למרות שההגדרה בוודאי מוכרת לכם, ניתן לתת לה פרשנות גאומטרית שאולי חדשה. למעשה פונקציית הערך המוחלט היא "פונקציית מרחק" על הציר הממשי (ביחס לראשית). נמחיש בציור:



באופן כללי, $|x-a|$ אומר לנו כמה x רחוק מ $a\in\mathbb{R}$. יש לשים לב שאנו משתמשים **רק** בהגדרה הפורמלית של הערך המוחלט, ולא זזים ממנה.

טעות נפוצה:

$$|4x-3|\neq 4x+3$$

תרגיל מנחה לתרגילים הבאים:
נניח כי $|x|=b$. אם $b<0$ אז אין פתרון. אם $b=0$ אז $x=0$. אם $b>0$ אז $x_{1,2}=\pm b$.

דוגמא:

נפתור:

$$|x-2|=3x+1$$

נשתמש בעקרון המנחה, כפי שתרגלנו:

$$\begin{array}{lcl} x-2=3x+1 & \text{or} & x-2=-(3x+1)=-3x-1 \\ -2x=3 & \text{or} & 4x=1 \\ x=-\dfrac{3}{2} & \text{or} & x=\dfrac{1}{4} \end{array}$$

לכאורה קיבלנו שני ערכים אפשריים ל-x, אבל אם נציב את הפתרון השני נקבל למעשה:

$$\left|-\frac{3}{2}-2\right|\stackrel{?}{=}3\left(-\frac{3}{2}\right)+1$$
$$\left|-\frac{7}{2}\right|\stackrel{?}{=}-\frac{7}{2}$$
$$\frac{7}{2}\neq-\frac{7}{2}$$

זה קורה לפעמים. צריך לוודא את הפתרונות האלגבריים שלנו!

למעשה לשוויון הזה יש פתרון יחיד והוא $x=\frac{1}{4}$.

אי שוויונות עם ערך מוחלט

נתחיל במקרה הפשוט ביותר.

$$|x|\leq 4$$

פרשנות גיאומטרית: המרחק של x מהראשית הוא לא יותר מ - 4. פרשנות זו נותנת לנו את תחום הפתרון עבור המשתנה x:

כמובן שהכול עובד אותו הדבר גם אם היינו פותרים עבור $<$ ולא $\leq$.

באופן כללי:

תרגיל:

נניח $|x| \leq b$ (אפשר להחליף באי שיוויון חזק $<$). אם $b < 0$ אז אין פתרון. אם $b = 0$ אז $x = 0$.
אם $b > 0$ אז $-b \leq x \leq b$.

דוגמא 1:

נפתור:

$$|2x - 4| < 10$$

אין הרבה מה לעשות, פשוט להשתמש בנוסחה למעלה ולקבל:

$$-10 < 2x - 4 < 10$$

מכאן פשוט צריך למצוא פתרון למערכת האי שוויונות שקיבלנו. מקבלים: $x \in (-3,7)$.

דוגמא 2:

נפתור:

$$|2x - 3| > 7$$

נשים לב, שאומנם הסימן של האי שוויון הפוך כאן (גדול לעומת קטן), אבל אינטואיציית המרחק שלנו

נשמרת. כאמור:

$$\begin{array}{ccc} 2x-3 < -7 & \text{or} & 2x-3 > 7 \\ 2x < -4 & \text{or} & 2x > 10 \\ x < -2 & \text{or} & x > 5 \end{array}$$

כנדרש.

אי שוויונות חשובים

אי שוויון המשולש

הוכיחו את אי שוויון המשולש:
לכל $x, y \in \mathbb{R}$ מתקיים $|x + y| \leq |x| + |y|$.
מתי מתקיים שיוויון?

הוכחה:

נוכיח ש- $|x + y| \leq |x| + |y|$. אם x, y חיוביים אז $|x + y| = x + y = |x| + |y|$. אם שניהם שליליים,
$|x + y| = -(x + y) = (-x) + (-y) = |x| + |y|$. המקרה היחיד שבו יש מה להוכיח הוא כאשר אחד המשתנים חיובי ואחד
שלילי. מכיוון ששני האגפים סימטריים, אפשר להניח ש- $y < 0 < x$, ואז
$|x + y| = \max\{x + y, -x - y\} \leq \max\{y, -x\} < y + (-x) = |y| + |x|$.

אי שוויון הממוצעים (החשבוני-גיאומטרי)

הוכיחו את אי שוויון הממוצעים:

לכל $x, y \geq 0$ מתקיים $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$.

מתי מתקיים שיוויון?

רמז: מצאו אי שוויון שקול מהצורה $(?)^2 \geq 0$.

הוכחה:

נכפיל ב2 ונעלה את האגפים בריבוע ונקבל:

$$(x+y)^2 \geq 4xy$$

וזה מתקיים תמיד כי:

$$0 \leq (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2 - 4xy = (x+y)^2 - 4xy$$

שוויון מתקיים כאשר $x = y$.

אי שוויונות – תרגילים

חלק א – אי שוויונות ממעלה ראשונה

1. מצאו את תחום הפתרון עבור המערכת:

$$\begin{cases} (1) & x & < & 6 \\ (2) & x+1 & < & 4 \end{cases}$$

2. פתרו את אי השוויון $3x + 6 \geq 6x + 12$
3. פתרו את המערכת:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} - \dfrac{x+3}{5} & < & 0 \\ \dfrac{x}{3} - \dfrac{x-2}{2} & < & 1 \end{cases}$$

4. פתרו את המערכת:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x-3}{8} + 5\right) & \leq & 2 \\ \dfrac{x}{5} - 3 & < & -1 \end{cases}$$

חלק ב – אי שוויונות ממעלה שנייה

1. הוכיחו כי לכל $x \in \mathbb{R}$, הביטוי $x^2 - 2x + 1$ הוא אי שלילי. עבור אילו ערכי x הביטוי מתאפס?
2. הוכיחו כי לכל $x \in \mathbb{R}$, הביטוי $-x^2 + 5x - 7$ הינו שלילי.
3. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:
   - $f(x) = \sqrt{\frac{x}{3}}$
   - $f(x) = \sqrt{4-x} + \sqrt{x+4}$
   - $f(x) = \sqrt{x-4} + \frac{1}{\sqrt{4-x}}$
   - $f(x) = \sqrt{2x^2 - 2x + 4}$
4. נתבונן בפונקציה:

$$f(x) = (m^2 - 5m)x^2 - (m-5)x - 1$$

   - עבור אילו ערכי m הפונקציה הינה קו ישר המקביל לציר x?
   - מהו הערך של m עבורה הפונקציה הינה פרבולה המשיקה לציר ה x בנקודה יחידה?
   - מהו m עבורו הפונקציה המתקבלת הינה פרבולה בעלת שורש בנקודה $x = 0.5$?
5. פתרו את האי שוויון: $-x^2 + 4 < 0$.
6. פתרו את האי שוויון: $2x^2 + 4x \geq x^2 - x - 6$.
7. פתרו את האי שוויון: $x^2 + x + 1 > 0$.
8. פתרו את האי שוויון: $x^2 + 2x - 8 \leq 0$.
9. פתרו את האי שוויון: $-x^2 + 6x - 9 \geq 0$.
10. פתרו את האי שוויון: $-x^2 + 6x - 9 < 0$.
11. פתרו את האי שוויונות הבאים:

1.) $2x + x^2 \geq 35$ 2.) $-12x - 2x^2 > 20$ 3.) $2x^2 - 4 < 7x$ 4.) $(x+3)^2 \leq 25$

5.) $x^2 - 14x \leq -49$ 6.) $x^2 - 10x \geq 1$ 7.) $x^2 + 30x + 1 > 4x - 170$

צחי חזן

חלק ג – אי שוויונות רציונליים

1. פתרו את האי שוויון:

$$\frac{x^2-16}{(x-1)^2}<0.$$

2. פתרו את האי שוויון:

$$\frac{3x+1}{x+4}\geq 1.$$

3. פתרו את האי שוויון:

$$\frac{x-8}{x}\leq 3-x.$$

4. פתרו את האי שוויון:

$$\frac{x^2+3x+2}{x^2-16}\geq 0$$

5. פתרו את האי שוויון:

$$\frac{(-2x-10)(3-x)}{(x^2+5)(x-2)^2}<0$$

6. פתרו את האי שוויון:

$$u\leq\frac{4}{u-3}$$

7. פתרו את האי שוויון:

$$\frac{t^3-6t^2}{t-2}\geq 0$$

8. פתרו את האי שוויון:

$$\frac{x+3}{x^2-5x+6}\leq 0$$

9. פתרו את האי שוויונות הבאים:

1.) $\frac{a-1}{a}>0$ 3.) $\frac{-x+8}{x-2}\geq 5$ 5.) $\frac{3x-1}{x}\leq -1$ 7.) $\frac{2}{p-1}\geq\frac{3}{4}$

2.) $\frac{3x+6}{2x-12}\leq 0$ 4.) $\frac{b+3}{5-2b}\leq 4$ 6.) $\frac{-2x+5}{x+6}>-2$ 8.) $\frac{2}{m+3}\leq 1$

חלק ד – אי שוויונות עם ערך מוחלט

1. פתרו:

$$|2x-5|=9$$

2. פתרו:

$$|1-3x|=20$$

3. פתרו:

$$|5y-8|=1$$

4. פתרו:

$$|4x+3| = 3-x$$

5. פתרו: $17 \cdot |2x-1| = |8x+87|$

6. פתרו את האי שוויון:

$$|9m+2| \le 1$$

7. פתרו את האי שוויון:

$$|3-2z| \le 5$$

8. פתרו את האי שוויון:

$$|6t+10| \ge 3$$

9. פתרו את האי שוויון:

$$|2-6y| > 10$$

10. פתרו את האי שוויונות הבאים:

(a) $|3x+2| < 0$

(b) $|x-9| \le 0$

(c) $|2x-4| \ge 0$

(d) $|3x-9| > 0$

11. פתרו את האי שוויונות הבאים:

(a) $|4x+15| < -2$ and $|4x+15| \le -2$

(b) $|2x-9| \ge -8$ and $|2x-9| > -8$

12. פתרו את האי שוויון:

$$|2x-3| > 5$$

13. פתרו:

$$4|2x-1| - 2 = 10$$

14. פתרו את האי שוויון:

$$|10+4x| < 14$$

15. פתרו את האי שוויון:

$$\frac{|2+3x|}{2} \ge 5$$

16. פתרו את האי שוויון:

$$|x^2+x-2| < x+3$$

17. פתרו את האי שוויון:

$$|x+1| < |x^2+2x+2|$$

18. פתרו את האי שוויון:

$$|x-3| + |x+1| > 6$$

19. הוכיחו את אי שוויון המשולש ההפוך:
לכל $x, y \in \mathbb{R}$ מתקיים $\big||a|-|b|\big| \le |a+b|$.
מתי מתקיים שיוויון?

20. הוכיחו את אי שוויון הממוצעים (הגיאומטרי-הרמוני):
לכל $x, y \ge 0$ מתקיים $\sqrt{xy} \ge \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$. מתי מתקיים שיוויון?

21. יהיו a, L מספרים. הוכיחו שאם לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים ש $|a-L| < \varepsilon$, אז $a = L$.
רמז: הוכיחו בשלילה.

נושא 4 – פונקציות אלמנטריות

מונוטוניות של פונקציות ממשיות

הגדרה: תהיינה A,B תתי קבוצות של $\mathbb{R}$ ו $f: A \to B$ פונקציה. נאמר כי f היא:

- מונוטונית עולה (ממש/חזק) אם לכל $x,y \in A$ כך ש $x<y$, מתקיים $f(x) \leq f(y)$ ($f(x) < f(y)$).
- מונוטונית יורדת (ממש/חזק) אם לכל $x,y \in A$ כך ש $x<y$, מתקיים $f(x) \geq f(y)$ ($f(x) > f(y)$).

טענה: פונקציה מונוטית ממש היא חח"ע.

פונקציה זוגית / אי זוגית

הגדרה: תהיינה A,B תתי קבוצות של $\mathbb{R}$ ו $f: A \to B$ פונקציה. נאמר כי f היא:

- זוגית: אם לכל $x,-x \in A$ מתקיים $f(-x) = f(x)$.
- אי זוגית: אם לכל $x,-x \in A$ מתקיים $f(-x) = -f(x)$.

דוגמאות: $f(x) = x^2, g(x) = 1$ הינן פונקציות זוגיות.

$f(x) = x, g(x) = x^3$ הינן פונקציה זוגית.

$f(x) = x + 1$ אינה זוגית ואינה אי זוגית.

טענה: כל פונקציה ממשית $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ניתנת לכתיבה כסכום של פונקציה זוגית ופונקציה אי זוגית:

$$f(x) = g(x) + h(x)$$

כאשר $g(x)$ זוגית ו $h(x)$ אי זוגית.

הוכחה:

נסמן $g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ ו $h(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$. ודאו כי אכן מתקיים השוויון והתנאים הדרושים.

חזקות

רוצים להגדיר את החזקה a^x עבור a,x ממשיים.

- ראשית נזכר בהגדרה כאשר $x = n \in \mathbb{N}$:

$$a^n = a \cdot a \cdots a$$

כאשר המכפלה היא n פעמים.

מגדירים $a^0 = 1$.

בנוסף נזכר בחוקי החזקות

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n, \qquad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

(יש להזהר בחוק מצד ימין – הביטוי לא שווה ל a^{m^n}!)

- עתה נוכל להגדיר עבור $x = n \in \mathbb{Z}$:

$$1 = a^0 = a^{n-n} = a^n \cdot a^{-n}$$

לכן

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

- עתה נוכל להגדיר גם עבור $x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$:

$$a^m = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n$$

לכן

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

בשלב זה אנו מבינים כי עלינו להגביל את a למספרים חיוביים בלבד – אחרת יהיו הרבה רציונליים שהחזקה לא תהיה מוגדרת עבורן – בסוף המטרה היא להגדיר פונקציה כאשר המשתנה זה המעריך.

- כדיי להגדיר את החזקה עבור $x \in \mathbb{R}$ רק נסביר כי המספרים הממשיים ניתנים לבנייה כסדרות מתכנסות של רציונליים (מושגים הנלמדים בקורס חדו"א) ולכן a^x יחושב כגבול של חזקות רציונליות מתאימות.

גרפים: לפי חלוקה למקרים של $a > 1$ ו $0 < a < 1$:

בפרט מונוטונית ממש (משמע לאי שוויונות).

לוגריתמים

נרצה להגדיר פעולה הפוכה לפעולת החזקה. כלומר פונקציה הופכית לפונקצית החזקה. נניח כי $a, x > 0$. נגדיר:

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$$

אכן מתקיים

$$\log_a a^x = x, \quad a^{\log_a x} = x$$

בנוסף, מחוקי החזקות נובעים הכללים הבאים:

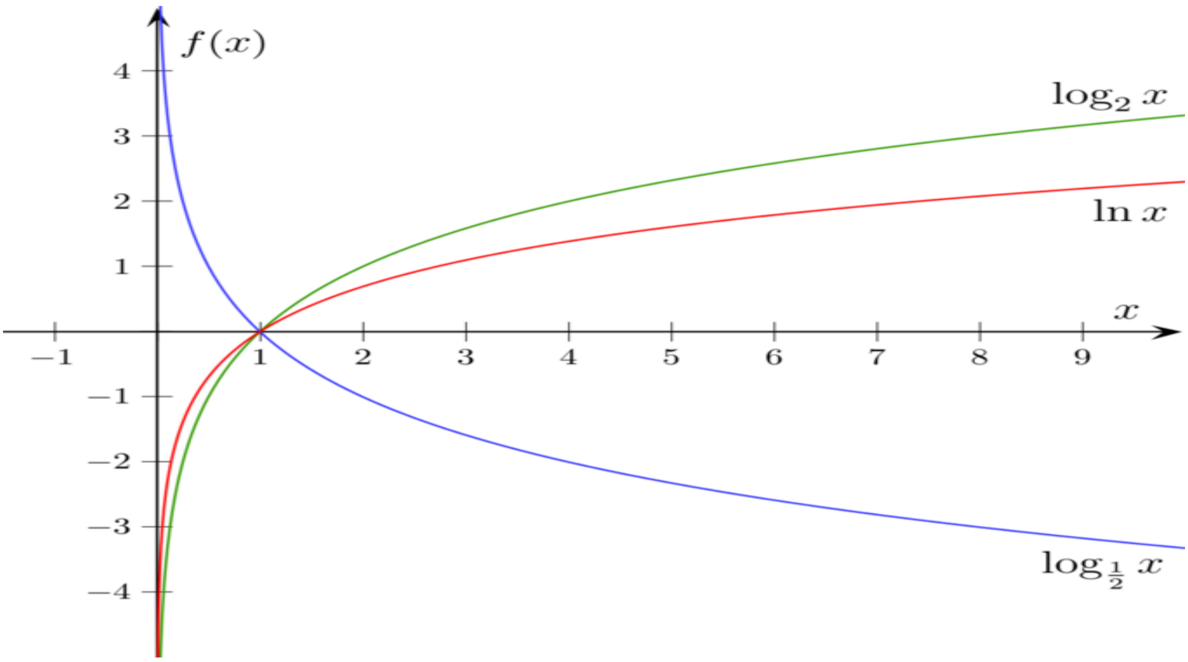
$$\log_a x + \log_a y = \log_a x \cdot y$$

$$\frac{\log_a c}{\log_a b} = \log_b c$$

$$\log_a x^k = k \cdot \log_a x$$

אזהרה: הכלל האחרון לא שווה לביטוי $\log_a^k x$!

גרפים: לפי חלוקה למקרים של $a > 1$ ו $0 < a < 1$:



בפרט מונוטונית ממש (משמש לאי שוויונות).

אי שוויונות מעריכיים

דוגמא 1:

$$4 \cdot 3^x < 9^x + 3$$

פתרון:

$$4 \cdot 3^x < 3^{2x} + 3$$

נציב $t = 3^x$ ונקבל:

$$4t < t^2 + 3$$

$$0 < (t-3)(t-1)$$

כלומר $t > 3$ או $t < 1$. אז $3^x < 1$ או $3^x > 3$, לכן הפתרון הוא $x < 0$ או $x > 1$.

דוגמא 2:

$$(3x-2)^{2x+4} > (3x-2)^{x+7}$$

כאן צריך להפריד למקרים שבהם בסיס החזקה גדול מ 1 והמקרה שבו בסיס החזקה הוא בין 0 ל 1.

בסיס החזקה הוא מספר בין 0 ל 1	**בסיס החזקה הוא מספר הגדול מ1**
נקבל את מערכת האי שוויונים: $\left.\begin{array}{l} 0 < 3x-2 < 1 \\ 2x+4 < x+7 \end{array}\right\}$ וגם **פתרון המערכת הוא:** $\frac{2}{3} < x < 1$	נקבל את מערכת האי שוויונים: $\left.\begin{array}{l} 3x-2 > 1 \\ 2x+4 > x+7 \end{array}\right\}$ וגם **פתרון המערכת הוא:** $x > 3$

קבוצת הפתרונות של האי שוויון היא איחוד התחומים המוצגים בטבלה.

אי שוויונות לוגריתמיים

דוגמא:

$$\log_3(81x)\cdot\log_3(x) > -4$$

מכיוון שפונקציית הלוגריתם מוגדרת רק עבור מספרים חיוביים ,אז בהכרח $x > 0$. נשתמש בחוקי לוגריתם שלמדנו , ונפתור:

$$\left(\log_3(81)+\log_3(x)\right)\cdot\log_3(x) > -4$$

$$\left(\log_3(3^4)+\log_3(x)\right)\cdot\log_3(x) > -4$$

$$\left(4\log_3(3)+\log_3(x)\right)\cdot\log_3(x) > -4$$

$$\left(4+\log_3(x)\right)\cdot\log_3(x) > -4$$

נציב $t = \log_3 x$ ונקבל:

$$t(t+4) > -4$$

$$t^2+4t+4 > 0$$

$$(t+2)^2 > 0$$

מכאן ברור ש:

$$t \neq -2$$

$$\log_3(x) \neq -2$$

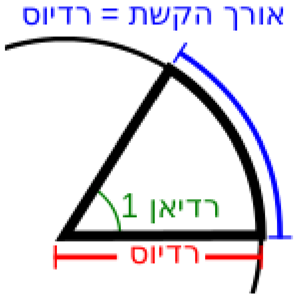
$$x \neq \frac{1}{9}$$

בשילוב עם תחום ההגדרה קיבלנו את קבוצות הפתרונות לאי שוויון:

$$x > 0, x \neq \frac{1}{9}$$

מעלות לעומת רדיאנים

מעלה אחת הינה חלוקה של המעגל ל 360 חלקים שווים. הרדיאן מוגדר כזווית היוצאת ממרכז מעגל ונוצרת על ידי קשת שאורכה שווה לאורך של רדיוס המעגל R (ראו באיור). כיוון שהיקף מעגל הוא $2\pi R$ במעגל כולו יש בסך הכל 2π רדיאנים.



מובן מסוים, הרדיאנים הם יחידות הזווית האמיתיות, מאחר שמדובר בגדלים חסרי ממד הנקבעים על פי היחסים הטבעיים שבבעיה, רדיוס וקשת המעגל. זאת לעומת השימוש במעלות, בו נעשית חלוקה שרירותית של המעגל ל-360 גזרות.

מכיוון שהמעגל מחולק ל 2π רדיאנים ול- 360 מעלות:

- זווית של רדיאן אחד שווה לזווית של $180/\pi \approx 57.296$מעלות.
- זווית של מעלה שווה ל $\pi/180 \approx 0.017$ רדיאנים.

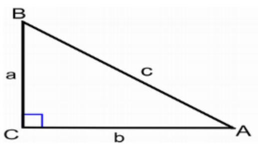
מעלות	30	45	60	90	120	180	270	**360**
רדיאנים	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	π	$3\pi/2$	2π

הרחבת הפונקציות הטריגונומטריות

בתיכון הגדרנו את הפונקציות הטריגונומטריות באופן הבא:
אם x היא זווית סמוכה ליתר במשולש ישר זווית (בפרט זווית בין 0 ל 90 מעלות או בין 0 ל $\pi/2$ ברדיאנים) אז:

1. סינוס של הזווית (sin x) מבטא את היחס שבין הניצב שמול הזווית והיתר במשולש; בדוגמה המופיעה בתרשים $\sin A = \frac{a}{c}$

- קוסינוס של הזווית (cos x) הוא היחס בין הניצב הסמוך לזווית והיתר במשולש; בדוגמה המופיעה בתרשים$\cos A = \frac{b}{c}$

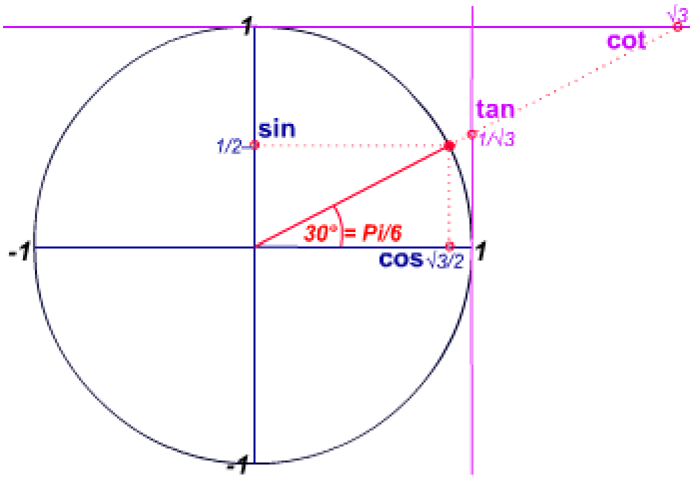


בנוסף, $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

עתה נרצה להרחיב את ההגדרה כך שהפונקציות הללו יוכלו לקבל כל מספר ממשי (ולא רק מספרים בין 0 ל-$\frac{\pi}{2}$).

מעגל היחידה הוא מעגל ברדיוס של יחידה אחת, שמציג באופן גרפי את הפונקציות הטריגונומטריות.

הסינוס והקוסינוס מורחבות גם לזוויות שאינן יכולות להופיע במשולש ישר-זווית על ידי הגדרתן באמצעות הקואורדינטות של מעגל היחידה, שמרכזו בראשית הצירים ורדיוסו 1. לפי הגדרה זו, הסינוס של הזווית הוא קואורדינטת ה-y של הנקודה הנוצרת על היקף מעגל היחידה עם "סיבוב" הרדיוס נגד כיוון השעון החל מקרן המספרים החיוביים בציר ה-x לאורך הזווית, קוסינוס הזווית הוא קואורדינטת ה-x של אותה נקודה. לפי הגדרה זו, עבור זוויות כלליות ייתכן שהסינוס או הקוסינוס יהיו שליליים (מה שלא אפשרי עבור זוויות שבין 0 ל-90), שם הפונקציות מייצגות יחס בין אורכים), אך סכום הריבועים שלהם הוא תמיד 1.



זהויות טריגונומטריות

- ערכים קלים לזכירה:

מעלות	0	30	45	60	90
רדיאנים	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
Sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	½	0

- ממשפט פיתגורס נקבל:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

- $\cos(-x) = \cos x$
- $\sin(-x) = -\sin x$
- סכומי זוויות:
  - $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$
  - $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$

- המקרים הפרטיים כאשר $\alpha = \beta$.

תרגיל:

הראו שמתקיים:

1. $\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
2. $\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

פתרון:

1. מהנוסחא לסינוס של סכום זוויות נקבל

$$\sin(\alpha) = \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$= \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

כמו כן

$$\sin(\beta) = \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$= \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

כעת נסכום את שניהם ונקבל את הדרוש.

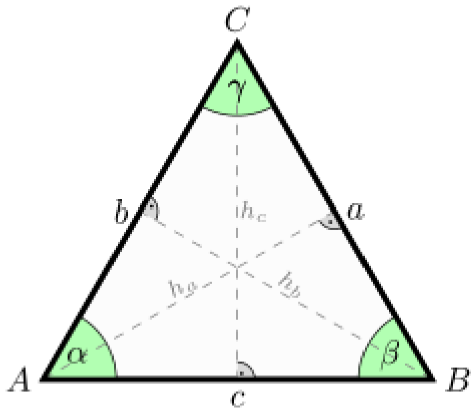
2. באופן דומה עם הנוסחא של קוסינוס של סכום.

תרגיל:

הוכיחו כי שטח משולש שווה צלעות בעל צלע באורך a הינו $\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$.

פתרון:

שטח המשולש הינו צלע כפול גובה חלקי 2. כלומר $\frac{ah}{2}$. מאחר ואורך כל זווית הוא $\frac{\pi}{3}$ נקבל כי $h = a\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.
סך הכל נקבל כי שטח המשולש הוא $\frac{ah}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.



 צחי חזן

פונקציות אלמנטריות – תרגילים

חלק א – אי שוויונות מעריכיים

1. פתרו את האי שוויונות הבאים:

א. $\left(\frac{1}{16}\right)^{x^2-3x} < \left(\frac{1}{4}\right)^{-4.5}$

ב. $(3-x)^{3x} > (3-x)^{x^2}$

ג. $2^{3^{4x+1}} > 2^{3^{2x+3}}$

ד. $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x} > \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3}$

ה. $4^{x+2} > 8^{2x}$

ו. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+1} > \left(\frac{1}{9}\right)^{x+2}$

ז. $2^x + 4^x > 6$

ח. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} < 8 < \left(\frac{1}{4}\right)^{2x}$

חלק ב – לוגריתמים

1. פתרו את המשוואה:

$$\log_7(x^2+x+1) + \log_7(x-1) = 1$$

2. נתון שמתקיים

$$\begin{cases} \log_a(b^x) & = & 2 \\ \log_b(c^x) & = & 3 \\ \log_c(a^x) & = & 5 \end{cases}$$

עבור מספרים $a, b, c > 0$ כלשהם. מצאו את x.

3. הוכיחו את הזהויות הבאות (העזרו בכללי הלוגריתמים):

א. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

ב. $\log_{a^b} x = \frac{1}{b}\log_a x$

חלק ג – אי שוויונות לוגריתמים

1. הוכיחו ש $\log_2(10) < \frac{10}{3}$.

2.

א. הוכיחו ש $\log_2(3) > \frac{3}{2}$.

ב. מה יותר גדול: $\log_2(3)$ או $\log_3(4)$?

3. מה יותר גדול: $\log_2(3) + \log_3(4)$ או $2\sqrt{2}$?

4. הוכיחו ש $\log_{81}(x) + \log_x(3) \geq 1$ לכל $x > 1$.

חלק ד – טריגונומטריה

1. בטאו את $y = \sin(2\alpha)$ באמצעות $x = \sin(\alpha) + \cos(\alpha)$.

2. הוכיחו את הנוסחאות לחצי זווית:

 צחי חזן

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

3. פתרו את המשוואה

$$\cos^2(x) - \sin^2(x) = \sin(x)$$

4. הוכיחו את הנוסחה ל tan של סכום זוויות:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

5. נניח שמתקיים $(2+\tan(\alpha))(2+\tan(\beta)) = 5$. מצאו את $\tan(\alpha+\beta)$.
6. בטאו את $y = \cos(2\alpha)$ באמצעות $x = \tan(\alpha)$.

 צחי חזן

נושא 5 – מספרים מרוכבים

הגדרת המרוכבים

ידוע כי למשוואה $x^2+1=0$ אין פתרון $x\in\mathbb{R}$. כי מספר כזה צריך לקיים $x=\sqrt{-1}$. אנו מרחיבים את המספרים הממשיים לקבוצה גדולה יותר המכילה את הפתרונות של משוואה זו. קבוצה זו נקראת המספרים המרוכבים. נגדיר את קבוצת המספרים

$$\mathbb{C}=\{a+bi|a,b\in\mathbb{R},i^2=-1\}$$

כעת למשוואה $z^2+1=0$ יש פתרון $z\in\mathbb{C}$, ולמעשה יש לו שניים – $\pm i$. מסתבר כי תוספת זו גורמת לכך שנקבל קבוצת מספרים בה **לכל** משוואה פולינומיאלית יש פתרון (תוצאה זו נקראת המשפט היסודי של האלגברה), כלומר לכל פולינום מרוכב מדרגה חיובית,

$$f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$$
$$f(z)=\sum_{k=0}^{n}a_kz^k\ \ ;\ \ (a_k\in\mathbb{C})\ (n\in\mathbb{N})$$

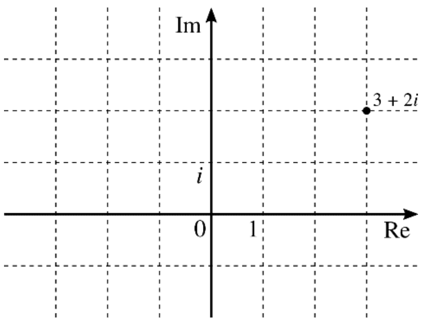
יש שורש: מספר מרוכב $z_0\in\mathbb{C}$ המקיים $f(z_0)=0$.

למשל, ל- $f(z)=z^6-5z^4+z-1$ יש שורש מרוכב. לרוב קשה למצוא אותו, אך המשפט מבטיח שהוא קיים.

טענה: $a+bi=c+di$ אמ"מ $a=b$ ו- $c=d$.

הגדרות בסיסיות

להצגה של מספר מרוכב לפי הגדרתנו לעיל, כלומר $a+bi$ כאשר $a,b\in\mathbb{R}$, קוראים הצגה קרטזית. המספרים a ו- b בהקשר זה נקראים החלק הממשי והמדומה בהתאמה.
ניתן לראות את המספר המרוכב $z=a+bi$ כווקטור במישור הממשי המתאים לנקודה (a,b). בהצגה זו ציר ה x ייקרא הציר הממשי וציר ה y ייקרא הציר המדומה. בנוסף בהצגה זו, נקרא למישור - **מישור גאוס**, על מנת להדגיש כי חושבים על הנקודות במישור כמספרים מרוכבים.



לפעמים מספר מרוכב יהיה נתון ללא ההצגה הקרטזית שלו, ולכן נוח הסימון הבא:

$$Re(a+bi)=a\ \ ;\ \ Im(a+bi)=b$$

פעולות על מספרים מרוכבים

נסמן $z=a+bi, w=x+iy$

חיבור / חיסור מספרים מרוכבים

נגדיר

$$z\pm w=(a\pm x)+i(b\pm y)$$

כפל מספרים מרוכבים

נגדיר

$$z\cdot w=(ax-by)+i(ay+bx)$$

ההגדרה נראית מוזרה אך קל לזכור כי זה מתאים לפתיחת סוגריים. הסיבה שמגדירים כך ולא בדרך אחרת (למשל קואורדינטה קואורדינטה כמו בחיבור) היא כי תחת פעולה זו נקבל שקבוצת המספרים היא שדה – מבנה אלגברי שנוח לעבוד איתו ובעל התכונה החשובה שלכל מספר שונה מאפס יש הופכי ביחס לכפל. נראה זאת לאחר הגדרת הפעולות הבאות.

צמוד מרוכב

נגדיר את הצמוד של מספר מרוכב $z\in\mathbb{C}$, שנסמנו $\bar{z}\in\mathbb{C}$, באופן הבא:

$$\bar{z}=Re(z)-Im(z)i$$

כלומר אם $z=a+bi$ בהצגה קרטזית, אז

$$\bar{z}=a-bi$$

משמעות גיאומטרית: שיקוף ביחס לציר הממשי.

קל לראות כי $\bar{\bar{z}}=z$.

ערך מוחלט

ניזכר כי ראינו עבור $x\in\mathbb{R}$ כי $|x|^2=x^2$, ולכן $|x|=\sqrt{x^2}$. עבור מספר מרוכב $z\in\mathbb{C}$ נגדיר בדומה:

$$|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$$

שימו לב שכל מספר ממשי $x\in\mathbb{R}$ מקיים $x=x+0i$, ולכן $x\in\mathbb{C}$, כלומר $\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$.

שאלה האם $|x|$ כפי שהגדרנו עבור מרוכבים שווה ל- $|x|$ כפי שהגדרנו עבור ממשיים?

תשובה אכן. עבור המרוכבים מתקבל $|x|=|x+0i|^2=\sqrt{x^2+0^2}=\sqrt{x^2}$, וזהו בדיוק הערך המוחלט כפי שהגדרנו עבור הממשיים.

כמו כן, הערך המוחלט מקיים כמה את התכונות הבאות:

1. $|z|\geq 0$ ושוויון מתקיים רק כאשר $z=0$.
2. $|z\cdot w|=|z|\cdot|w|$.
3. אי שוויון המשולש: $|z+w|\leq|z|+|w|$.

בנוסף מתקיים:

$$z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=|z|^2$$

מנת מספרים מרוכבים

נניח כי $w \neq 0$ אז

$$\frac{z}{w} = \frac{z}{w} \cdot \frac{\overline{w}}{\overline{w}} = \frac{z \cdot \overline{w}}{|w|^2}$$

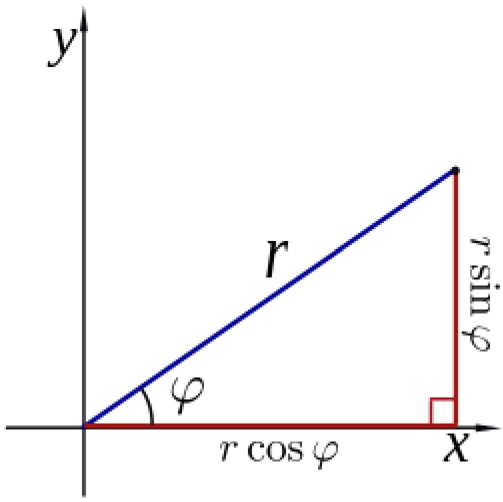
בפרט נקבל כי אם $z \neq 0$, נכפול ב- $\frac{1}{|z|^2}$ כדי לקבל את המשוואה השקולה:

$$z\frac{\bar{z}}{|z|^2} = 1$$

לכן הראנו כמובטח כי לכל מרוכב $z \neq 0$ יש הופכי, ונסמנו $\frac{1}{z}$.

ייצוג פולרי / קוטבי / טריגונומטרי

ראינו כי כל מספר מרוכב $z = x + iy$ ניתן להציג כנקודה במישור בה הקוארדינטה הראשונה הינה x והשנייה הינה y. כל נקודה במישור ניתן להציג בעוד דרך: על ידי המרחק שלה מהראשית הנקבע ביחידות והזווית שלה מהציר הממשי החיובי, אשר לא נקבעת ביחידות – לכל נקודה מתאימות אינסוף זוויות הנבדלות בכפולה שלמה של 2π. על מנת להתאים זווית יחידה **נבחר** זווית יחידה לכל נקודה בקטע $(-\pi, \pi]$.



הצגה פולרית של מספר מרוכב הינה צמד (r, φ) כאשר $r \geq 0$ ו $-\pi < \varphi \leq \pi$.
r נקרא הרדיוס ו φ נקרא הארגומנט של z.

מעבר מהצגה פולרית להצגה קרטזית

בהינתן כי $z = (r, \varphi)$, כאשר $r \geq 0$ ו $-\pi < \varphi \leq \pi$, נוכל באמצעות הפונקציות הטריגונומטריות למצוא את ההצגה הקרטזית (ראו איור לעיל):

$$\begin{cases} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{cases}$$

אז נקבל

$$z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

לרישום זה יש 2 סימונים מקוצרים נפוצים: $\operatorname{cis}\varphi = \cos\varphi + i\sin\varphi$ וסימון אוילר $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

סך הכל בהינתן $z = (r, \varphi)$ ההצגה הקרטזית הינה

$$z = r\operatorname{cis}\varphi = re^{i\varphi}$$

מעבר מהצגה קרטזית להצגה פולרית

בהינתן $z = x + iy$ עלינו למצוא את הרדיוס למצוא את המרחק מהראשית והזווית. על ידי חילוץ r, φ מהמשוואות

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

נקבל

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$
$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

ישנן 2 בעיות:

1. עלינו לבדוק בנפרד את המקרה בו $x = 0$:

$$\varphi = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & y > 0 \\ \text{לא מוגדר} & y = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & y < 0 \end{cases}$$

2. הפונקציה arctan מחזירה ערכים בין $-\frac{\pi}{2}$ לבין $\frac{\pi}{2}$. זה קורה כי צמצמנו את tan לתחום הזה כדי שתהיה חד חד ערכית ונוכל להפוך אותה, אך יכולנו לצמצם אותה לתחומים אחרים ולקבל מקורות אחרים הנבדלים בכפולות שלמות של π. לכן נוסיף או נחסיר π על מנת לקבל זווית מתאימה לרביע בו נמצאת הנקודה.
באופן מפורט:
אם הנקודה ברביע הראשון או הרביעי, כלומר $x > 0$ לא צריך להוסיף או להחסיר כלום.
אם הנקודה ברביע השני, כלומר $x < 0, y > 0$ אז $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$.
אם הנקודה ברביע השלישי, כלומר $x < 0, y < 0$ אז $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi$.

כפל בצורה פולרית

במספרים הממשיים מתקיים כי $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$. נוכיח כי זהות זו ממשיכה להתקיים גם במעבר למספרים מרוכבים:

$$\begin{aligned} e^{i\varphi}e^{i\theta} &= (\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= (\cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta) + i(\cos\varphi\sin\theta + \cos\theta\sin\varphi) \\ &= \cos(\varphi+\theta) + i\sin(\varphi+\theta) = e^{i(\varphi+\theta)} \end{aligned}$$

לכן נוח לכפול מספרים מרוכבים בצורה זו. אם $z = re^{i\varphi}, w = \rho e^{i\theta}$ אז

$$zw = r\rho e^{i(\varphi+\theta)}$$

חזקות של מרוכבים

נקבל באופן מיידי כי לכל $z = re^{i\varphi}$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$z^n = r^n e^{in\varphi}$$

דוגמא:

נחשב $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)^{10}$:

$$\left|\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right| = 1$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = \frac{\pi}{6}$$

לכן

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)^{10} = 1^{10}e^{\frac{i10\pi}{6}} = e^{i5\pi/3} = e^{-i\pi/3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

שורשים של מספר מרוכב – נוסחת דה מואבר

נניח כי נתון מספר w ומספר טבעי n ורוצים למצוא את כל המספרים המרוכבים z המקיימים

$$z^n = w$$

אז מאחר וחזקה מרוכבת יותר נוח לחשב בצורה פולרית, נסמן, $w = \rho e^{i\theta}$ (כלומר ρ, θ נתונים) ו $z = re^{i\varphi}$ (כלומר מחפשים r, φ).
אז המשוואה נראית כך

$$r^n e^{in\varphi} = \rho e^{i\theta}$$

לכן

$$\begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \varphi = \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{2\pi k}{n}, \qquad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

כמובן שיש כאן מחזוריות, לכן n הזוויות השונות המתאימות ל n השורשים השונים הן עבור הבחירות $k \in \{0,1,2,\dots,n-1\}$.

קיבלנו את נוסחת דה מואבר

$$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \left\{\sqrt[n]{\rho}e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2\pi k}{n}\right)} \mid k \in \{0,1,2,\dots,n-1\}\right\}$$

דוגמא:

נמצא את פתרונות המשוואה $z^4 = 1$.

לכן $1 = 1e^{i0}$

$$z_0 = e^{\left(\frac{0}{4}+\frac{2\pi 0}{4}\right)} = 1$$
$$z_1 = e^{\left(\frac{0}{4}+\frac{2\pi 1}{4}\right)} = i$$
$$z_0 = e^{\left(\frac{0}{4}+\frac{2\pi 2}{4}\right)} = -1$$
$$z_0 = e^{\left(\frac{0}{4}+\frac{2\pi 3}{4}\right)} = -i$$

מספרים מרוכבים – תרגילים

חלק א – הגדרת המרוכבים ופעולות בסיסיות

1. חשבו:

א. i^2

ב. i^3

ג. i^4

ד. i^{21}

2. מצאו נוסחה כללית עבור i^n לכל n טבעי.

3. חשבו

א. i^{-1}

ב. i^{-2}

ג. i^{-3}

ד. i^{-4}

ה. i^{-24}

4. יהיו $z_1=5+6i$, $z_2=3-2i$ ו $z_3=1+3i$. מצאו:

א. $z_1+z_2-z_3$

ב. $2z_2+3z_1$

ג. $\overline{z_3-z_2}$

ד. z_1z_2

ה. $\frac{z_1}{z_3}$

ו. $\frac{i}{z_2}$

5. מצאו את הפתרונות של:

א. $x^2=-2$

ב. $x^2-2x+40=0$

ג. $x^2+16=0$

ד. $x^2-4x+20=0$

ה. $x^2+x+1=0$

ו. $x^4+5x^2+6=0$

חלק ב – מישור גאוס וצורה פולרית

1. ציירו את המספרים הבאים במישור המרוכב:
   א. $2+i$
   ב. i
   ג. $1-3i$ והצמוד המרוכב שלו.
2. רשמו בצורה פולרית את המספרים הבאים:
   א. $3i$
   ב. $2+2i$
   ג. $1+\sqrt{3}i$
   ד. $-3+4i$
   ה. $-10i$
   ו. $-10-10i$
3. פשטו:
   א. $32\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$
   ב. $3(\cos\pi+i\sin\pi)$
   ג. $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$
4. רשמו בצורה קרטזית:
   א. $\left(3,\frac{20\pi}{7}\right)$
   ב. $(1,4\pi)$
   ג. $\left(2,-\frac{\pi}{6}\right)$
   ד. $(1,\pi)$
   ה. $(1,0)$
   ו. $\left(2,\frac{\pi}{2}\right)$

חלק ג – חזקות ושורשים

1. חשבו:
   א. $(2+2i)^4$
   ב. $\left(\sqrt{3}-i\right)^5$
   ג. $\sqrt[4]{16+16i}$
   ד. $\sqrt[5]{-32}$
2. פתרו את המשוואות הבאות:
   א. $z^2+i\sqrt{32}z-6i=0$
   ב. $\bar{z}=2z^2$
   ג. $|z|^2=z+\bar{z}$
   ד. $z^3+4|z|=0$
   ה. $z^3-1=0$

חלק ד – שאלות כלליות

1. פתרו את המשוואה הבאה:

$$\frac{z-i}{z+i}=1$$

2. השורשים של המשוואה $z^{10}=1-i$ הם: $z_1,z_2,\dots,z_{10}$.
   א. חשבו את הערך של: $|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_{10}|=?$.
   ב. חשבו את הערך של: $z_1^{40}+z_2^{40}+\cdots+z_{10}^{40}=?$

3. מצאו משוואה ריבועית, שמקדמיה הם מספרים ממשיים ואחד משורשי המשוואה הוא:

$$\frac{6+13i}{1-2i}$$

4. פתרונות המשוואה: $z^4=-8+8\sqrt{3}i$ הם: z_1 הנמצא ברביע הראשון, z_2 הנמצא ברביע השני, z_3 הנמצא ברביע השלישי ו- z_4 הנמצא ברביע הרביעי.
   א. חשבו את ערך הביטוי:

$$\left|\frac{z_3^k\cdot z_4^2}{z_1^2\cdot z_2^k}\right|$$

   עבור k טבעי.
   ב. נתון: $z_1\cdot z_2\cdot z_3\cdot z_4\cdot z_5=16$. מצאו את z_5.

5. הוכיחו כי אם $|z|=|w|=1$ אז

$$\frac{z-w}{1-zw}\in\mathbb{R}$$

נושא 6 – אינדוקציה

אינדוקציה

אינדוקציה היא שיטת הוכחה מתמטית להוכחת טענות הנוגעות (בד"כ) למספרים טבעיים. במקרה הפשוט, נרצה להוכיח שטענה P_n נכונה לכל n טבעי. לצורך כך, נפעל בשני שלבים:

1. בסיס האינדוקציה: נוכיח שהטענה P_1 נכונה

2. שלב האינדוקציה: נוכיח את **הגרירה** הבאה: לכל k טבעי, אם P_k נכונה, אז P_{k+1} נכונה (כלומר, מוכיחים $P_k \Rightarrow P_{k+1}$).

וזה מספיק כדי להוכיח שהטענה P_n נכונה. נתייחס לנכונות שיטת הוכחה זו כאקסיומה, הנקראת **אקסיומת האינדוקציה: אם** (P_1 נכונה **וגם** $P_k \Rightarrow P_{k+1}$ לכל k טבעי), **אז** P_n נכונה לכל n טבעי.

מקובל להמשיל אינדוקציה לאבני דומינו. שלב אינדוקציה "מוכיח" שהאבן הראשונה מפילה את השנייה, השנייה את השלישית וכן הלאה עד שכולן נופלות. לא נותר אלא רק להפיל את האבן הראשון, בבסיס האינדוקציה.

הערות:

1. לעתים בסיס האינדוקציה יהיה שונה מ- P_1. לדוגמה, אם הטענה נכונה רק החל מ- $n=5$ נתחיל מ- P_5

2. בשלב האינדוקציה, **איננו** מוכיחים ישירות את P_n או את P_{n+1}, אלא **רק** את יחס הגרירה בין שתי הטענות.

סימון הסכימה:

דוגמאות:

$$\sum_{i=1}^{5} i = 1+2+3+4+5$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\ldots+n$$

$$\sum_{i=1}^{n} 3 = 3+3+\ldots+3 = 3n$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sin k = \sin 1+\sin 2+\ldots+\sin n$$

<u>תרגיל</u>: הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים $\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+...+n = \frac{1}{2}n(n+1)$

<u>פתרון</u>: ראשית נזהה את הטענה, והיא $P_n = \left[1+2+3+...+n = \frac{1}{2}n(n+1)\right]$. דוגמה למקרים:

$$P_1 = 1 = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot(1+1)$$

$$P_2 = 1+2 = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot(2+1)$$

$$P_3 = 1+2+3 = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot(3+1)$$

$$P_{100} = 1+2+3+...+100 = \frac{1}{2}\cdot 100\cdot(100+1)$$

נוכיח את הטענה. ראשית, בסיס האינדוקציה הוא הטענה P_1, ואכן $1 = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot(1+1) = 1$. כעת, נעבור לשלב האינדוקציה ונוכיח $P_k \Rightarrow P_{k+1}$ לכל k טבעי. יהי k טבעי ונניח כי P_k נכונה, כלומר כי $1+2+3+...+k = \frac{1}{2}k(k+1)$ מתקיים. מהי הטענה P_{k+1}?

$$P_{k+1} = \left[1+2+3+...+(k+1) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)\right]$$

נראה כיצד להוכיח את P_{k+1} **בהינתן** הנכונות של P_k. ננסה לייצג את P_{k+1} במונחים של P_k, ואכן:

$$1+2+3+...+(k+1) = 1+2+3+...+k+(k+1) = [1+2+3+...+k]+(k+1)$$

החלק שבסוגריים המרובעים הוא בדיוק אגף שמאל P_k, ולכן,

$$1+2+3+...+(k+1) = \underbrace{[1+2+3+...+k]}_{known}+(k+1) = \frac{1}{2}k(k+1)+(k+1) = (k+1)\left(\frac{1}{2}k+1\right) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$$

כנדרש. ראינו ש-$P_k \Rightarrow P_{k+1}$ וכן P_1 נכונה. ההוכחה הושלמה.

פרדוקסים עם אינדוקציה

דוגמה לחשיבות בסיס האינדוקציה: נשים לב שעבור הטענה $n>n+1$ (שבירור אינה נכונה), ניתן להוכיח $n>n+1 \Rightarrow n+1>n+2$ כלומר מעבר האינדוקציה מתקיים. אבל, הטענה אינה נכונה כי לא נמצא בסיס מתאים.

דוגמה מפורסמת נוספת היא הוכחת הטענה: לכל הסוסים יש אותו צבע.

מקרה בסיס: ניקח סוס אחד. באופן טריוויאלי יש לו אותו צבע כמו לעצמו. כעת נניח שלכל קבוצה בת n סוסים יש אותו צבע. נסתכל על קבוצה בת $n+1$ סוסים. נסתכל על n הסוסים הראשונים. לפי הנחת האינדוקציה, יש לכולם אותו צבע. כעת נסתכל על קבוצת n הסוסים האחרונים. גם להם יש את אותו צבע. לכן, לסוס האחרון יש אותו צבע כמו לסוסים באמצע, ולכן לכל הסוסים יש אותו צבע.

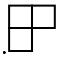
שאלה לדיון: איפה הפגם בהוכחה? למעשה הנחנו בשלב האינדוקציה שיש "סוסים באמצע", מה שנכון רק עבור $n>2$ ולכן בסיס האינדוקציה צריך להיות $n=2$ שעבורו הטענה, כמובן, אינה נכונה.

אינדוקציה - תרגילים

חלק א - אינדוקציה

1. הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים $2^n > n$
2. הוכיחו כי לכל n טבעי, $8^n - 3^n$ מתחלק ב-5 ללא שארית (זהו מקרה פרטי של תרגיל 7)
3. הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים $\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} i^3$
4. הוכיחו כי לכל $n \geq 2$ טבעי מתקיים $n! < n^n$
5. מצאו את p עבורו לכל $n \geq p$ טבעי מתקיים $n! \geq 2^n$ והוכיחו את הטענה.
6. הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n}}$
7. יהיו a,b מספרים טבעיים. הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים ש- $a^n - b^n$ מתחלק ב- $a-b$ ללא שארית.
הנחיה: c מתחלק ב- d ללא שארית אם ורק אם קיים k טבעי כך ש- $c = d\cdot k$.

חלק ב – עוד תרגילים

1. הוכיחו כי לכל $n \geq 5$ מתקיים $n \geq \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$.
2. הוכיחו שכל לוח שחמט מגודל $2^n \times 2^n$ שהוצאה ממנו משבצת אחת בדיוק, ניתן לריצוף ע"י אבנים מהצורה .
3. הוכיחו כי לכל $n \geq 2$ מתקיים $2^n + 4^n \leq 5^n$.
4.
א) הוכיחו שלכל n טבעי מתקיים: $\frac{2}{2\cdot 3} + \frac{2}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+2}$.
ב) מצאו בהסתמך על סעיף א' את הסכום: $\frac{2}{42} + \frac{2}{56} + \frac{2}{72} + \cdots + \frac{2}{870}$.
5. הוכיחו:
א) $1 + 4 + 9 + 16 + \cdots + n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
ב) $1^2\cdot n + 2^2(n-1) + 3^2(n-2) + \cdots + n^2\cdot 1 = \frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$.
6. מצאו איזו מהנוסחאות: (א) $\log\frac{2n^2}{n!}$, (ב) $\log\frac{(n+1)^n}{n!}$, (ג) $\log\frac{n^3+1}{n!}$ מייצגת את סכום n האיברים הראשונים של הטור $1\log\frac{2}{1} + 2\log\frac{3}{2} + 3\log\frac{4}{3} + 4\log\frac{5}{4} + \cdots$ והוכיחו את נכונותה.
7. הוכיחו באינדוקציה שסכום זוויותיו של מצולע קמור בעל $n \geq 3$ צלעות הוא $180°(n-2)$.
8. מטריגונומטריה של תיכון אנו מכירים את הנוסחאות: $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, $\sin 2x = 2\sin x\cos x$.
בתרגיל הזה נכליל אותן ונקבל נוסחאות עבור $\cos nx$, $\sin nx$ ע"י כפולינום של $\cos x$ ו-$\sin x$.
א) הוכיחו כי לכל n קיים פולינום $P_n(x)$ ממעלה n כך ש-$\cos nx = P_n(\cos x)$. [למשל $P_2(x) = 2x^2 - 1$]
ב) הוכיחו כי לכל n קיים פולינום $Q_{n-1}(x)$ ממעלה $n-1$ כך ש-$\sin nx = \sin x\cdot Q_{n-1}(\cos x)$.
הערה: הפולינומים P_n, Q_n נקראים פולינומי צ'ביצ'ב (Chebyshev).

נושא 7 – קומבינטוריקה

סכום וכפל

סימון כמות איברים בקבוצה X תסומן $|X|$.

סימון עבור $n \in \mathbb{N}$ נסמן $[n] = \{1, \dots n\}$.

[נעבוד עם קבוצות אלו לשם נוחות – לא נשתמש בתכונות של המספרים, אלא רק בשמות שלהם. כלומר, בכל מקום שנשתמש בקבוצה $[n]$ בהמשך, ניתן להחליפה בקבוצה אחרת עם n איברים.]

שאלה עבור A, B סופיות וזרות, מהו $|A \cup B|$?

תשובה $|A \cup B| = |A| + |B|$.

נקרא עקרון הסכום. עבור יותר קבוצות, הכלל עובד כאשר דורשים שיהיו זרות בזוגות.

שאלה עבור A, B סופיות, מהו $|A \times B|$?

תשובה $|A \times B| = |A| \cdot |B|$, כי זו מסקנה מעקרון הסכום לאחר ששמים לב לשוויון

$$A \times B = \bigcup_{a \in A} (\{a\} \times B)$$

ובצד ימין כתוב איחוד של $|A|$ קבוצות זרות בזוגות שכל אחת מהן מגודל $|B|$ (כי לכל $a \in A$ ניתן להתאים בין איברי $\{a\} \times B$ לאיברי B באופן ברור ולכן הן קבוצות מאותו הגודל).

נקרא עקרון המכפלה. ניתן לראות את זה כמסקנה מעקרון הסכום, כי עבור יותר זוגות עובד באופן זהה.

תרגיל כמה תוצאות אפשריות יש להטלת קובייה פעמיים?

פתרון קבוצת האפשרויות להטלה הראשונה היא $[6]$, כנ"ל להטלה השנייה. לכן קבוצת האפשרויות הנה $[6] \times [6]$, ולפי עקרון המכפלה יש בה 36 אפשרויות.

תרגיל כמה טבעיים אי-זוגיים יש בקטע $[0,99]$ בעלי ספרת עשרות ואחדות שונות?

פתרון מספר טבעי הוא אי-זוגי בדיוק כאשר ספרת האחדות בקבוצה $\{1,3,5,7,9\}$. ספרת העשרות היא בקבוצה $\{0,1, \dots 9\}$, אך לכל בחירה של ספרת האחדות ספרת העשרות צריכה להיות שונה. כלומר כל בחירה של $x \in \{1,3,5,7,9\}$ ובחירה של $y \in \{0,1, \dots 9\} \setminus \{x\}$ נותנת מספר כזה, וכל מספר כזה מתקבל מבחירה כזו. לכן סה"כ ישנם 45 מספרים כנ"ל.

[שימו לב: לא השתמשנו בעיקרון המכפלה, אלא בעקרון הסכום עבור

$$\bigcup_{x \in \{1,3,5,7,9\}} (\{x\} \times T_x)$$

כאשר $T_x = \{0,1, \dots 9\} \setminus \{x\}$.]

בחירות מתוך קבוצה

חשיבות לסדר עם החזרות

שאלה כמה פונקציות $[n] \to [k]$ קיימות?

טענה לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $k \in \mathbb{N}$, יש n^k פונקציות $[n] \to [k]$ שונות.

הוכחה יהי $n \in \mathbb{N}$. נראה כי לכל $k \in \mathbb{N}$, יש n^k פונקציות שונות ע״י אינדוקציה.

בסיס: אם $k = 0$, אז יש בדיוק פונקציה אחת – הפונקציה הריקה.
[הסבר: הקבוצה הריקה היא תת קבוצה של $[k] \times [n]$ שמקיימת את תכונת הקיום ויחידות בהגדרה של פונקציה כזוגות סדורים. אם זה מבלבל, אתם מוזמנים להתחיל את האינדוקציה ב- $k = 1$.]

צעד: נניח שהטענה נכונה עבור $k = m \in \mathbb{N}$ ונוכיח אותה עבור $m + 1$. לפי הנחת האינדוקציה, יש n^m פונקציות $[m] \to [n]$. כל פונקציה כזו ניתן להרחיב לפונקציה $[m + 1] \to [n]$ בדיוק ב- n אופנים – כל בחירה של הערך שהפונקציה נותנת לאיבר הנוסף יוצרת פונקציה נוספת, וכל פונקציה מתקבלת כהרחבה כזו. לכן יש $n \cdot n^m = n^{m+1}$ פונקציות $[m + 1] \to [n]$. ■

<u>ניתן לחשוב על פונקציה $[k] \to [n]$</u>
<u>כבחירה ״עם סדר״ של k עצמים ״עם החזרות״</u>
<u>מתוך שק של n עצמים.</u>
<u>ישנם n^k בחירות כאלו.</u>

חשיבות לסדר ללא החזרות

שאלה כמה פונקציות $[n] \to [k]$ חח״ע קיימות?

סימון

- לכל $n \in \mathbb{N}$, $n! := \prod_{i=1}^{n} i$.
- לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $k \in \mathbb{N}$

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}, & k \le n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

[יש שמגדירים את הסימון רק עבור $k \le n$.]

הערה על פניו, $\binom{n}{k}$ תמיד רציונלי חיובי. האם הוא תמיד מספר טבעי?

טענה לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $k \in \mathbb{N}$, יש $\binom{n}{k}k!$ פונקציות $[n] \to [k]$ חח״ע שונות.

הוכחה יהי $n \in \mathbb{N}$.

נראה כי לכל $k \in \mathbb{N}$, אם $k \le n$ אז יש $\frac{n!}{(n-k)!}$ פונקציות שונות, אחרת אין כאלו, ע״י אינדוקציה.

בסיס: אם $k = 0$, אז $k \le n$ ואכן $\frac{n!}{(n-0)!} = 1$, כרצוי.

צעד: נניח שהטענה נכונה עבור $m \in \mathbb{N}$ ונוכיח אותה עבור $m+1$. אם $m+1 \leq n$, אז $m \leq n$, ולפי הנחת האינדוקציה יש $\frac{n!}{(n-m)!}$ פונקציות חח"ע $[m] \to [n]$. כל פונקציה כזו ניתן להרחיב לפונקציה $[m+1] \to [n]$ בבדיוק $n-m$ אופנים – כל בחירה של הערך שהפונקציה נותנת לאיבר הנוסף שאינו נכלל בקבוצת m הערכים המקוריים יוצרת פונקציה חח"ע חדשה, ואין דרכים נוספות ליצור פונקציות. לכן קיבלנו שיש

$$(n-m)\cdot\frac{n!}{(n-m)!}=\frac{n!}{(n-m-1)!}=\binom{n}{n-m-1}(n-m-1)$$

פונקציות חח"ע $[m+1] \to [n]$. המקרה $n < m+1$ נותר כתרגיל. ■

<u>ניתן לחשוב על פונקציה $[n] \to [k]$ חח"ע</u>

<u>כבחירה "עם סדר" של k עצמים "בלי החזרות"</u>

<u>מתוך שק של n עצמים.</u>

<u>ישנם $\binom{n}{k}k!$ בחירות כאלו.</u>

דרך נוספת לחשוב על כך זו ככמות דרכים להכניס יונים לשובכים באופן שבו לכל יונה יש שובך משלה.

במקרה שבו $k=n$ סופר את כמות התמורות (הדרכים לסדר קבוצה), כלומר יש $k!$ כאלו.

תרגיל כמה דרכים יש לסדר את האותיות במילה "ממלמלת"?

פתרון נסמן את הכמות המבוקשת ב- x. נשאל: כיצד ניתן לסדר 6 אנשים בשורה, ש- 3 מהם ממשפחת "מושל", 2 מהם ממשפחת "לפלנד", ו- 1 ממשפחת "תופר"?

מצד אחד, ניתן פשוט לסדר אותם ללא קשר לשמות המשפחה, ולקבל $6!$.

מצד שני, ניתן תחילה לבחור אילו מקומות יינתנו לאיזו משפחה, ובנפרד לסדר כל משפחה באופן פנימי, ונקבל $x\cdot 1!\cdot 2!\cdot 3!$.

לכן $6! = x\cdot 1!\cdot 2!\cdot 3!$, כלומר $x=60$.

תרגיל כמה דרכים יש לסדר 7 אנשים במעגל?

פתרון נסמן את הכמות המבוקשת ב- x. נשאל: כמה דרכים יש לסדר 7 אנשים בשורה? אנו יודעים כי יש $7!$ כאלו, אבל מצד שני אפשר תחילה לסדרם במעגל, ואז לבחור איפה במעגל תתחיל השורה, כלומר $x\cdot 7$. לכן $7x = 7!$, כלומר $x=6!$.

השתמשנו בשיטות שונות לספור את אותה הכמות, וקיבלנו בכך שוויון בין ביטויים שונים. זוהי שיטה נפוצה בקומבינטוריקה.

התעלמות מסדר ללא החזרות

שאלה כמה תתי-קבוצות של n מגודל k קיימות?

תשובה נסמן ב- x את כמות תתי-הקבוצות. נשים לב שניתן לספור את כמות הפונקציות החח"ע באופן הבא: נבחר קודם כל את התמונה של הפונקציה שחייבת להיות מגודל k, ולאחר מכן נבחר כיצד לסדר את המקורות, ונקבל $x\cdot k!$.

לכן $x\cdot k! = \binom{n}{k}k!$, כלומר $x=\binom{n}{k}$.

<u>ניתן לחשוב על תת-קבוצה של n מגודל k</u>

<u>כבחירה "בלי סדר" של k עצמים "בלי החזרות"</u>

<u>מתוך שק של n עצמים.</u>

<u>ישנם $\binom{n}{k}$ בחירות כאלו.</u>

כתופעת לוואי קיבלנו ש- $\binom{n}{k}$ הנו מספר טבעי!

תרגיל הוכיחו כי לכל $l \leq k \leq n$ כולם טבעיים, מתקיים $\binom{n}{l}\binom{n-l}{k-l} = \binom{n}{k}\binom{k}{l}$.

פתרון נספור את כמות הקבוצות המקיימות $Z \subseteq Y \subseteq [n]$ ו- $|Y| = k; |Z| = l$ בשתי דרכים.

אגף שמאל: לבחור את $Y \subseteq [n]$ כפול לבחור את $Z \subseteq Y$.

אגף ימין: לבחור את $Z \subseteq [n]$ כפול לבחור את $Y \setminus Z \subseteq [n] \setminus Z$.

קומבינטוריקה – תרגילים

1. חולצה מסוימת נתפרת ב-12 צבעים שונים, בגרסה נשית ובגרסה גברית, ובשלוש מידות לכל מין. כמה גרסאות שונות של החולצה נתפרות?

2.
   א. בכמה דרכים ניתן לבחור נציג יחיד עבור ועדת הקישוט מבין כיתות ה'1 ו– ה'2, אם ב– ה'1 יש 20 תלמידים וב– ה'2 30 תלמידים?
   ב. בכמה דרכים ניתן לבחור שני נציגים – אחד מ– ה'1 ואחד מ– ה'2?
3. בחנות תכשיטים גדולה יש 4 דלתות ו-8 חלונות. פורץ החליט שעליו להיכנס לחנו דרך חלון ולצאת דרך דלת. בכמה דרכים שונות הוא יכול לעשות את זה?
4. בחפיסת קלפים יש 52 קלפים רגילים ועוד 2 ג'וקרים (שונים). מלבד הג'וקרים יש 13 קלפים מכל צורה (תלתן, יהלום, לב ועלה), 26 קלפים מכל צבע (שחור ואדום). בכמה דרכים שונות ניתן לבחור מתוך החבילה (אין משמעות לסדר שבו נבחרו הקלפים):
   א. מלך ומלכה
   ב. מלך או מלכה
   ג. ג'וקר וקלף נוסף
   ד. ג'וקר וקלף אדום
   ה. שני ג'וקרים
   ו. מלך וקלף אדום
   ז. מלך או קלף אדום
   ח. מלכה אדומה וקלף לב

5. בשכונה מסמנים כל בית ע"י 2 אותיות. בכמה דרכים שונות אפשר לסמן בית אם:
   א. אסור שאות תחזור על עצמה באותו סימון?
   ב. מותר לחזור על אות באותו סימון?
6. כמה מספרים 4-ספרתיים ניתן להרכיב מהספרות 2,3,4,5?
   כמה מספרים כאלה שמכילים את הספרה 3 ניתן להרכיב?
7. כמה מילים באורך k ניתן לכתוב עם n אותיות?
8. בכיתה יש 32 בנים. כל בן מכיר 5 בנות וכל בת מכירה 8 בנים, כאשר היכרות היא הדדית. כמה בנות יש בכיתה?
9. בכנס חקלאי נכחו 36 קיבוצניקים ומספר כלשהו של מושבניקים. ידוע כי כל קיבוצניק לחץ במהלך הכנס ידיים עם שלושה מושבניקים, וכל מושבניק לחץ במהלך הכנס ידיים עם ארבעה קיבוצניקים. מה היה מספר המושבניקים בכנס?
10. בטאנזאקיסטאן נמצאים בשימוש 20 שטרות כסף שונים. כל ילד יודע כי על כל אחד מן השטרות מופיעות פניהם של 9 נסיכים; עוד ידוע כי כל נסיך מככב על גבם של 12 שטרות שונים. כמה נסיכים יש בטאנזאקיסטאן?
11. בשפת הסתרים "מוקו" כל המילים הן בנות חמש אותיות עבריות, וכל מילה בשפה שאינה מתחילה באות א' או ברצף "גזר" נגמרת בשתי אותיות אהו"י. כמה מילים יש בשפה לכל היותר?
12. כמה מחרוזות בנות 3 אותיות בעברית קיימות, כאשר
    א. אות לא חוזרת 3 פעמים
    ב. אות לא חוזרת פעמיים
    ג. אות לא מופיעה פעמיים ברצף
13. בכמה אופנים ניתן לזווג n גברים ו- n נשים ל- n זוגות?
14. באולם שידוכים מסתובבים ברגע נתון $n+1$ גברים, n נשים ו- $n-1$ כלבים. בכמה אופנים ניתן לשדך את המסובים ל $n-$ משפחות, כאשר "משפחה" הנה מארג של גבר, אישה וכלב, גבר אחד נשאר רווק, ומשפחה אחת היא ללא כלב?

15. בכמה אופנים ניתן לחלק $n+1$ גברים ו־n נשים ל־n זוגות מעורבים? (גבר אחד נשאר רווק)
16. כמה מילים שונות ניתן ליצור מהמילה קשקושבלבוש ע"י ערבוב האותיות?
17. כמה מילים שונות באורך 10 ניתן לייצר מ- 5 א', 3 ב' ו-2 ג' כאשר האות הראשונה אינה א' והאחרונה היא ג'.
18. כמה מילים שונות ניתן ליצור מהמילה דונלדדאק ע"י ערבוב האותיות, כך שהראשונה אינה ק' והאחרונה הנה ד'?
19. כמה מילים שונות בנות 7 אותיות ניתן ליצור כאשר ברשותנו לכל היותר שלושה א'־ים, שלושה ב'-ים ושני ג'-ים?
20. * על מדף 5 ספרי מתמטיקה, 3 מדע בדיוני ו 2־ ספרי מתח (כל הספרים שונים זה מזה). בכמה אופנים ניתן לארגן את המדף כך ש:
    א. ללא הגבלה?
    ב. שספרים מאותו הסוג יהיו זה לצד זה?
    ג. ספרי המדע הבדיוני יהיו זה לצד זה, אך בין ספרי המתח יפריד לפחות ספר אחד?
    ד. קיבלתם מתנה ליום ההולדת עוד שני ספרים חשובים: ספר היסטוריה וספר פילוסופיה. נרצה להוסיף אותם למדף הספרים. בכמה אופנים ניתן לארגן כעת את המדף כך ש:
        (א) ספר ההיסטוריה יהיה מימין לספר האזרחות?
        (ב) ספר ההיסטוריה לא יהיה בין שני ספרים, אלא אם כן אחד מהם הוא ספר אזרחות?
21. כמה אפשרויות יש לסידור n אנשים במעגל?
22. בכמה אופנים ניתן לסדר 6 בנים ו-4 בנות סביב שולחן עגול כך שכל הבנות יושבות בגוש אחד ויוגב יושב ליד הבת?
23. בכמה אופנים ניתן לסגר n אנשים בשורה כאשר דני מימין לדנה? (לא בהכרח צמוד)
24. בכמה אופנים ניתן לסדר 10 ילדים בשורה כך שדני מימין לדנה ודינה?
25. מהו מספר התמורות על $[n]$ עבור $n \geq 3$ כך שהמספרים $1,2,3$ נמצאים זה לצד זה (בסדר כלשהו?)

נספח 1 – לוגיקה בסיסית

במתמטיקה עוסקים בהוכחות והוכחות הינן שרשראות של היסקים. אנו מניחים הנחות בסיסיות ומתוכן מסיקים מסקנות. הלוגיקה היא זו שמרשה לנו להסיק מסקנות אלו.

קשרים

טבלת הקשרים:

שם פורמלי	איך קוראים	סימן	דוגמא לשימוש	ניסוח מלא בעברית
גרירה (אימפליקציה)	אם – אז	$\rightarrow$	$A \rightarrow \mathrm{B}$	אם A אז B, A גורר את B, B נובע מ A
שלילה	לא	$\neg$	$\neg A$	A לא נכון לא A
קוניוקציה	וגם	$\wedge$	$A \wedge B$	A וגם B
דיסיונקציה	או	$\vee$	$A \vee B$	A או B
שקילות (אקויולנציה)	אם ורק אם (אמ"ם)	$\leftrightarrow$	$A \leftrightarrow B$	A אם ורק אם B A שקול ל B A תנאי הכרחי ל B

דוגמא 1: p - אני לומד פיזיקה, q - אני לומד אנגלית.

- $p \leftrightarrow \neg\neg p$. מסקנה: אפשר להוכיח את p על ידי הוכחה ש- $\neg p$ שגוי.
- $\neg p \wedge \neg q \leftrightarrow \neg(p \vee q)$.
- $p \vee q$. נדגיש שנכון גם כששניהם נכונים – בדומה למושג האיחוד.

דוגמא 2: p – איתי הגיע, q – פלאפי נובח.

נשים לב כי לא נוכל להסיק מ- $q \to p$ שהטענה $p \to q$ נכונה, אבל כן נקבל $(q \to p) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$.

כמתים

טבלת הקשרים:

שם פורמלי	איך קוראים	סימן	דוגמא לשימוש	ניסוח מלא בעברית
שיוך	שייך	$\in$	$x \in A$	x שייך ל A x איבר ב A
כמת אוניברסלי	כל לכל	$\forall$	$\forall x \in A$	לכל x השייך ל A
כמת אקזיסטנציאלי	קיים יש	$\exists$	$\exists x \in A$	קיים x השייך ל A

האם $2 < x$ נכון?

- אין לזה ערך נכון/שגוי כי זה תלוי בהשמה במקום x. אבל עבור x מסוים זה כן יהיה פסוק אמת או שקר.
- מהי שלילת הטענה הזו? הרי אם נאמר שהיא $x \leq 2$ אז ניתקל בבעיה, שכן גם הקודמת וגם זו לא נכונה כאשר נציב "תפוח" במקום x.

כשיש משתנים חופשיים נדרוש שיוגדר גם תחום דיון, כלומר מה בכלל מותר לנו להציב במקום משתנים. אפשר למשל להתבונן במשוואה $x + y = 5$ כדי למצוא את כל הדרכים לחלק את חמשת התפוחים ברשותנו בין דני ליוסי, ואז תחום הדיון הוא המספרים הטבעיים (ולא הממשיים למשל).

נקבל כי הכמתים הינם דרך להתמודד עם משתנים חופשיים (כלומר לקשור אותם).

- בטענה *לכל* $x \in \mathbb{R}$ *מתקיים ש-* $x > 2$ אין משתנים חופשיים (x קשור) והיא כמובן שגויה שכן 1 הוא ממשי ו- $2 < 1$ שגויה.

למעשה הראינו כי *קיים* $x \in \mathbb{R}$ *כך ש-* $x \leq 2$.

[הערה: הרבה זהויות שנלמדו בתיכון, כגון $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, למעשה מסתירות את הכמתים האוניברסליים, ומה שכתוב שם בצורה יותר מדויקת זה הפסוק

$$\forall a \in \mathbb{R} \forall b \in \mathbb{R}\,.\,(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

גם אנו נחטא לעיתים באי-דיוק זה בעת ניסוח שאלות וטענות במשך הקורס, אך תמיד תחת ההנחה שהקורא מסוגל להשלים את הפרטים כפי שהתכוונו אליהם.]

- גם לטענה *קיים* $x \in \mathbb{R}$ *המקיים ש-* $x > 2$ יש ערך אמת, והוא כמובן נכון, כי למשל 4 ממשי ומקיים $4 > 2$.

[הערה: חשוב לדבר על דוגמה ספציפית ל- x מתאים ולא להסתפק במן "ברור שיש כזה", כי ישנה נטייה להסתבך בהוכחת טענות קיום (בחדו"א למשל) בלי סיבה, למשל מנסים להביא את הדוגמה "הכי מייצגת" או לתת אוסף של דוגמאות וכו', שזה טוב מאוד בחשיבה על החומר בבית, אבל פחות בעת פתרון שאלה במבחן.]

דוגמא לשקילויות שמערבות כמתים ושלילה.: X קבוצה של חפצים ו- φ תכונה שאומרת ש- x חפץ ירוק, אז:

- $\neg\forall x \in X \,.\, \varphi \leftrightarrow \exists x \in X \,.\, \neg\varphi$: קיים חפץ שאינו ירוק אמ"מ לא כל החפצים ירוקים.
- $\neg\exists x \in X \,.\, \varphi \leftrightarrow \forall x \in X \,.\, \neg\varphi$: אין חפץ ירוק אמ"מ כל החפצים אינם ירוקים.

טענות וקבוצות

על אף שהטענה $x > 2$ אינה פסוק, יש לה שימוש שדווקא פסוק לא היה יכול להוות לנו – היא יכולה להגדיר לנו קבוצה, באופן הבא: נגדיר את P להיות קבוצת המספרים בתחום הדיון (למשל המספרים השלמים) המקיימים את הטענה. למעשה תרגמנו את הטענה שלנו לקבוצה על ידי כך שהיוותה מסננת לקבוצה אחרת. עוד יותר למעשה, אנחנו כבר מכירים את זה – כך אנו מגדירים קבוצות!

$$\{x \in \mathbb{Z} | x > 2\}$$

אפשר גם ההיפך. בהינתן קבוצה Q, ניתן לטעון ש- $x \in Q$, וקיבלנו טענה עם משתנה חופשי.

[אופציונלי: למעשה, התרגום הזה עובד גם בטענות עם יותר ממשתנים חופשיים, אך הקבוצה תכיל רשימות (שאורכן ככמות המשתנים החופשיים). למשל, הטענה $x > 2$ או $y = 1$ *בתחום* $\mathbb{N}$ מתרגמת לקבוצה $P \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 | x > 2 \vee y = 1\}$ של זוגות – בדיוק הזוגות הטבעיים המקיימים את הטענה. האם $(1,3) \in P$? לא, כי הפסוק $1 > 2$ או $3 = 1$ שגוי. האם $(3,1) \in P$? כן, כי הפסוק $3 > 2$ או $1 = 1$ נכון.]

הוכחת פסוקים

כפי שהפנמנו קודם, טענה איננה נכונה/שגויה אם מופיעים בה משתנים חופשיים. פסוק, לעומת זאת, חייב להיות נכון או שגוי. הבה נתבונן במספר פסוקים ונבדוק את נכונותם.

1. *קיים מספר שלם* z *כך ש-* $z > 0$. 1 הוא שלם ומקיים $1 > 0$, לכן הפסוק נכון.
2. *כל* $z \in \{-1,0,1\}$ *מקיים* $(-z)^2 = z^2$. ניתן להיווכח על ידי שלושה חישובים פשוטים שאכן הפסוק נכון. ביצענו כאן למעשה *חלוקה למקרים*.
3. *כל מספר שלם* z *מקיים* $(-z)^2 = z^2$. כעת אנו נתקלים בבעיה – אין דרך לבצע אינסוף חישובים אחד-אחד! על כן, הדרך היחידה לבצע את כל החישובים היא לבצע אינסוף מהם בו זמנית.

נעשה זאת באופן הבא: נתבונן במספר z שלם מסוים אך ללא ערך ספציפי, ונבדוק האם אנו מסוגלים לאמת את הטענה באופן זה.

אכן, יש כלל חזקות שאומר לכל שני מספרים ממשיים a ו- b מתקיים $(ab)^2 = a^2b^2$. לכן בפרט זה נכון עבור $a = -1$ ו- $b = z$, שכן אלו מספרים ממשיים.

$$(-z)^2 = (-1 \cdot z)^2 = (-1)^2 z^2 = 1 \cdot z^2 = z^2$$

מאחר והמספר השלם z שלקחנו היה כללי, הדבר נכון לכל מספר שלם z שכזה. כלומר בהינתן מספר שלם ספציפי, ניתן לשים אותו במקום z בהוכחה והיא תהיה כולה נכונה.

4. *כל מספר שלם z מקיים $z^2 > 0$*. זוהי טענה שגויה, שכן $0^2 > 0$ טענה שגויה. ליתר דיוק, שלילת טענה זו היא *קיים מספר שלם z שלא מקיים $z^2 > 0$*. הוכחנו אותה לעיל כשמצאנו z כזו. נוהגים לקרוא ל- z כזו *דוגמה נגדית*, שכן היא היוותה דוגמה הנוגדת את הטענה המקורית.

5. *כל מספר שלם z מקיים $z^2 \geq 0$*. ננסה להוכיח טענה זו. יהי מספר z שלם (שרירותי). נחלק למקרים, רק שהפעם חלקם יכילו אינסוף הצבות. הרעיון הוא שבמקום לבצע את כל החישובים בו זמנית, נבצע חלקים מהחישובים בו זמנית, כך שישלימו לכלל החישובים.

   א. אם $z = 0$, אז $z^2 = 0$ ולכן וודאי ש- $z^2 \geq 0$.

   ב. אם $z > 0$, אז נכפול את אי-השוויון ב- z ונקבל $z^2 > 0$, ולכן בוודאי $z^2 \geq 0$.

   ג. אם $z < 0$, אז נכפול את אי-השוויון ב- z ונקבל $z^2 > 0$ (סדר אי-השוויון התהפך!), ולכן בוודאי $z^2 \geq 0$.

מאחר וכל z שלם נמצא לפחות במקרה אחד מאלו, הטענה הוכחה.

6. *לכל תת קבוצה של המספרים השלמים יש איבר גדול ביותר*. שלילת טענה זו היא *קיימת תת קבוצה של המספרים השלמים שאין לה איבר גדול ביותר (שלכל איבר בה יש איבר גדול יותר)*. אכן, לקבוצת המספרים השלמים עצמה אין איבר גדול ביותר. מדוע? יהי מספר שלם z. אז $z + 1$ גם שלם וגדול יותר מ- z. לכן הפסוק המקורי שגוי.

7. *את הטענה הבאה אי-אפשר לעשות כאן, אבל אפשר לציין אותה ואז להראות אותה אחרי שמושג האינדוקציה הוסבר ותורגל מעט.*
   לכל תת קבוצה סופית ולא ריקה של המספרים השלמים יש איבר גדול ביותר.

ננסח טענה שקולה שניתן להוכיח באינדוקציה: *לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $X \subseteq \mathbb{Z}$ כך ש- $|X| = n$ מתקיים שיש ב- X איבר גדול ביותר*.

כאשר $n = 1$ הטענה מתקיימת כי יש רק איבר אחד אז ברור שהוא הגדול ביותר. יהי $k \in \mathbb{N}_+$ עבורו הטענה נכונה כאשר $n = k$, ותהי $X \subseteq \mathbb{Z}$ כך ש- $|X| = k + 1$. ניקח איבר $z \in X$. אם z הכי גדול ב- X, סיימנו. אחרת, יש $y > z$ בקבוצה $X \setminus \{z\}$, קבוצה בעלת k איברים. כאן יש איבר גדול ביותר, בפרט גדול או שווה ל- y ולכן גדול גם מ- z, לכן הוא גדול ביותר ב- X.

[אופציונלי: להציג את הטענה בלי ההנחה שהקבוצה לא ריקה, וזו עוד דוגמה לכך שצריך לבחור את מקרה הבסיס נכון.]

תוספות – לוגיקה בסיסית

להדגיש שאנו מחשיבים את $q \to p$ כנכון אלא אם p נכון אבל q שגוי (בעיקר לשים דגש על הנכונות כאשר p ו- q שניהם שגויים ושאין תלות בכך ש- q יהיה תלוי ב- p במובן לא מוגדר כלשהו).

יש כללים לוגיים שקל להסכים עליהם. למשל, כנראה תסכימו איתי ש*השמש לא לא צהובה* כי אתם יודעים ש*השמש צהובה*, ובאופן כללי $p \leftrightarrow \neg\neg p$. כנראה שגם תסכימו שאם ידוע לכם ש*אני לא לומד פיזיקה ולא לומד אנגלית* אז בטח שאתם יודעים שאני לא לומד פיזיקה או אנגלית, ובאופן כללי $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg q \wedge \neg p$. זהו אחד מכללי דה-מורגן בגרסתם הלוגית.

♡ המושג *או* במתמטיקה מתייחס לכך שלפחות אחד מהדברים נכון – כלומר הוא מתיר את המצב ששני הדברים נכונים. למשל, *השמש זורחת בבוקר או שוקעת בערב* היא טענה נכונה. זה נשמע מוזר בשפה מדוברת, אך מספיק להתעסק טיפה עם מושגים לוגים על טענות מתמטיות כדי להבחין שזוהי הדרך הנוחה יותר להגדיר את המושג. למשל, חשבו על הקשר בין המושג של *או* למושג של *איחוד*.

נניח שאנו מסכימים שהטענה *אם עומר פה רוקי נובח* נכונה. כעת, נניח בנוסף שעומר פה. האם רוקי נובח? וודאי, זו בדיוק המשמעות של הטענה. אבל אם עומר לא הגיע, האם רוקי לא נובח? לא! ברור שרוקי יכול לנבוח גם בלי שעומר יגיע. אולי רוקי כלב ממש מעצבן שנובח כל הזמן? באופן כללי, מהטענה $q \to p$ לא נובע $p \to q$.

האם הטענה *אם רוקי נובח אז השמש צהובה* נכונה? עד כמה שהדבר נשמע מוזר, התשובה היא כן. על אף שהשמש צהובה גם אם רוקי לא נובח. כלומר במתמטיקה מסכימים שאין צורך שp יהיה רלוונטי לq בטענה $q \to p$ כדי שהטענה תהיה נכונה.

האם הטענה *אם השמש אינה צהובה אז רוקי אינו נובח* נכונה? עד כמה שהדבר נשמע מוזר, התשובה היא כן. טענות מסוג זה, כלומר $q \to p$ כאשר p שגוי נקראות *נכונות באופן ריק*. מדוגמה זו העיסוק בטענות מסוג זה נשמע מיותר לחלוטין, שכן מי יכול להתעניין בטענה כזו, שנכונה באופן ריק? כדי לקבל תשובה מספקת נאלץ להתאזר במעט סבלנות.

האם $\mathrm{x} > 2$? עד כה, התעסקנו בטענות שבהן כל המושגים היו קונקרטיים. משתנה שמופיע כך נקרא *חופשי*. כלומר, אף אחד לא הגדיר לנו מה x מייצג. כאשר בטענה מופיעים משתנים חופשיים, לא ניתן לייחס לה ערך נכון/שגוי, כי זה תלוי בערך שניתן למשתנה. במקרה לעיל, אם נשים במקום x את הערך 3 נקבל $3 > 2$, טענה נכונה.

מה יקרה אם נציב במקום x משהו שהוא אינו מספר? אפשר להגדיר שהיחס לא מתקיים, אבל זה מעורר בעיה אחרת: אילו ערכי x מקיימים את שלילת הטענה $\mathrm{x} > 2$? ברור כי 1 מקיים זאת. למעשה, $2 > 2$ שגויה, ולכן גם 2 מקיים זאת. היינו רוצים לומר ששלילת הטענה היא $\mathrm{x} \leq 2$. אך מה לגבי ירוק? הרי גם ירוק לא גדול מ2, וגם לא קטן או שווה ל- 2, לא כך? דבר זה מדגים שכאשר אנו שוקלים טענות עם משתנים חופשיים, חשוב שנכריז על *תחום* הדיון שלנו. הסימן $>$ מיד מעורר אצלנו קונטקסט של מספרים, אבל לעיתים נרצה לטעון טענות על תחומים אחרים, כגון תחום הקבוצות שדיברנו עליו בנושא הקודם.

יש עוד דרך, יותר מעניינת, להתמודד עם משתנים חופשיים – לכמת אותם (מלשון כמות). הכוונה היא שנחליף את הטענה הקודמת בטענה שאולי ייחסתם לה באופן אוטומטי: האם *לכל מספר* x *מתקיים ש-* $x > 2$? עכשיו יש על מה לדבר, והטענה כמובן שגויה, כי זה לא מתקיים לכל מספר x. למשל, אם נשים במקום x את הערך 1 נקבל $1 > 2$, טענה שגויה. משתנה שאינו חופשי נקרא *קשור*.

מלבד הכמת *לכל* ישנו כמת מקובל נוסף – כמת ה*קיים*. כלומר, היה ניתן לשאול האם *קיים מספר* x *המקיים ש-* $x > 2$? שוב יש על מה לדבר, ועכשיו הטענה כמובן נכונה. מדוע? כי ראינו במו עינינו שלהחליף את x ב- 3 מייצר טענה נכונה, ולכן קיים כזה מספר.

שימו לב: יחד עם הכמת אנו מכריזים על העולם עליו אנו מכמתים, אחרת לא ברור מהן האפשרויות לבחור מהן.

לטענה ללא משתנים חופשיים נקרא *פסוק*. כלומר, פסוק הוא נכון/שגוי. טענה עלולה להיות תלויה בערך שנותנים למשתנים.

לוגיקה בסיסית - תרגילים

חלק א'

1. הגדירו את קבוצת המספרים הזוגיים באמצעות טענה עם משתנה חופשי אחד. זכרו כי צריך גם להגדיר את תחום הדיון, כדי שנדע מה מותר להציב בטענה במקום המשתנה החופשי.
2. כאשר $x \in \mathbb{Z}$, איזו קבוצה מגדירה הטענה *קיים* y *שלם כך ש-* $x = 2y$? איזו קבוצה מגדירה הטענה *קיים* y *שלם כך ש-* $x = 3y$?
אם נקרא לטענות הקודמות טענה א' וטענה ב' בהתאמה, איזו קבוצה מגדירה הטענה *טענה א' וגם טענה ב'*? מה הקשר בין הקבוצות?
נסו ליחס את הקשר שמצאתם לקשר יותר כללי בין טענות לקבוצות, ונסו למצוא קשרים דומים נוספים – דייקו ככל הניתן.
3. הגדירו את קבוצת המספרים השלמים שיש להם שורש שלם בעזרת שוויון וכפל (וסימנים לוגיים) בלבד.

חלק ב'

1. בסעיפים הבאים, קבעו האם הטענה נכונה או שלילתה, והוכיחו זאת.
   א. לכל $n \in \{0,1,2\}$ אם $n > 1$ אז $n^2 > 0$.
   ב. לכל $n \in \{0,1,2\}$ אם $n > 0$ אז $n^2 > 1$.
   נסו להבין מדוע דוגמאות אלו מניעות אותנו להגדרת *אם* p *אז* q כפי שהגדרנו.
2. בסעיפים הבאים, קבעו האם הטענה נכונה או שלילתה, והוכיחו זאת.
   א. $\forall m \in \mathbb{Z} \exists n \in \mathbb{N} \,.\, m < n$.
   ב. $\exists n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{Z} \,.\, m < n$.
   מה מוסר ההשכל?
3. נאמר שהקבוצה X היא גדולה יותר מקבוצה Y אם $Y \subseteq X$. הגדירו בהתאם את המושג "הקבוצה הגדולה ביותר באוסף הקבוצות $\mathbb{N}$", ופתרו את הסעיפים הבאים.
   א. רשמו את (ארבעת) תתי הקבוצות של $\{0,1\}$.
   ב. האם יש קבוצה גדולה ביותר באוסף? הוכיחו את תשובתכם.
   ג. רשמו את (ארבעת) תתי הקבוצות של $\{0,1,2\}$ המכילים לכל היותר איבר אחד.
   ד. האם יש קבוצה גדולה ביותר באוסף? הוכיחו את תשובתכם.
   [הערה: היה ניתן להגדיר את המושג באופן סביר אחר: הקבוצה X היא גדולה יותר מקבוצה Y אם $|Y| \leq |X|$ (כמות איברים). אתם מוזמנים לפתור את התרגיל מחדש תחת הגדרה זו.]
4. בסעיפים הבאים, קבעו האם הטענה נכונה או שלילתה, והוכיחו זאת.
   א. לכל קבוצה X קיימת קבוצה Y כך ש- $Y \setminus X$ היא סינגלטון (בעלת איבר בודד).
   ב. לכל קבוצה X קיימת קבוצה Y כך ש- $X \setminus Y$ היא סינגלטון (בעלת איבר בודד).
5. בסעיפים הבאים, קבעו האם הטענה נכונה או שלילתה, והוכיחו זאת.
   א. לכל מספר ממשי x מתקיים $x < 2x$.

ב. לכל מספר ממשי x קיים מספר שלם y כך ש- $-y < x < y$?

ג. לכל מספר ממשי x קיים מספר שלם y כך שלכל מספר שלם z מתקיים $-y < zx < y$.

6. הוכיחו כי *אם יש קבוצה הגדולה ביותר באוסף קבוצות אז היא יחידה*, כאשר גדולה הכוונה להגדרה מהתרגיל הקודם.

[רמז: אין לנו כמת שמביע את מושג היחידות. נסו לנסח טענה זו בעזרת הכמתים קיים ולכל.]

[הערה: גם כאן אתם מוזמנים לפתור את התרגיל תחת ההגדרה האחרת מההערה באותו תרגיל.]

חלק ב' - תוספות

1. נסמן ב- $S = \{s_1, \dots s_{25}\}$ את קבוצת הסטודנטים בכיתה וב- $C = \{R, G, B\}$ את קבוצת צבעי הבסיס המקובלת. תהי $L \subseteq S \times C$ כלשהי. הוכיחו/הפריכו:

א. $(\exists w \in C \forall z \in S \,.\, (z, w) \in L) \to (\forall x \in S \exists y \in C \,.\, (x, y) \in L)$

ב. $(\forall x \in S \exists y \in C \,.\, (x, y) \in L) \to (\exists w \in C \forall z \in S \,.\, (z, w) \in L)$

[עצה: דמיינו כי L מוגדרת על פי $(s, c) \in L$ כאשר הסטודנט s מחבב את הצבע c.]

2. נאמר ש- $\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}$ חסומה מלעיל אם $\exists \mathrm{r} \in \mathbb{R} \forall \mathrm{a} \in \mathrm{A} \,.\, \mathrm{a} \leq \mathrm{r}$.

א. קבעו לכל קבוצה האם היא חסומה מלעיל והוכיחו זאת.

I. $\{0,1,2\}$.

II. $\mathbb{Z}$.

III. $\left\{\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{n}+1} \middle| \mathrm{n} \in \mathbb{N}\right\}$.

IV. קבוצת המספרים הראשוניים.

[רמז: על דרך השלילה ניתן להוכיח שהיא לא חסומה. אם נניח (בשלילה) שהיא חסומה מלעיל, אז כמות הראשוניים סופית. נכפיל את כולם ונוסיף 1...]

ב. מצאו דוגמאות נוספות לקבוצות חסומות מלעיל ולקבוצות שאינן.

ג. נאמר ש- $\mathrm{A} \subseteq \mathbb{R}$ חסומה על ידי שלם מלעיל אם $\exists \mathrm{r} \in \mathbb{Z} \forall \mathrm{a} \in \mathrm{A} \,.\, \mathrm{a} \leq \mathrm{r}$. הוכיחו כי כל קבוצה חסומה מלעיל אם"ם היא חסומה על ידי שלם מלעיל (במקרה כזה אומרים ששתי ההגדרות שקולות).

3. נאמר שסדרה אינסופית $\mathrm{a}_0, \mathrm{a}_1, \dots \mathrm{a}_\mathrm{n}, \dots$ של מספרים ממשיים היא אפסה אם מתקיים:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N} \forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}_{>\mathrm{N}} \,.\, -\varepsilon < \mathrm{a}_\mathrm{n} < \varepsilon$$

א. קבעו אם הסדרות הבאות אפסות והוכיחו זאת.

I. $\mathrm{a}_\mathrm{n} = \frac{1}{\mathrm{n}}$ לכל $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$.

II. $\mathrm{a}_\mathrm{n} = 1$ אם n זוגי ו- $\mathrm{a}_\mathrm{n} = 0$ אם n אי-זוגי.

ב. מצאו דוגמאות נוספות לסדרות אפסות וסדרות שאינן.

ג. תהי סדרה $\mathrm{a}_0, \mathrm{a}_1, \dots \mathrm{a}_\mathrm{n}, \dots$ ונגדיר סדרה $\mathrm{b}_\mathrm{n} = \mathrm{a}_{\mathrm{n}+1}$ לכל $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$. הוכיחו/הפריכו:

I. אם a_n אפסה אז גם b_n אפסה.

II. אם b_n אפסה אז גם a_n אפסה.

גרסה נוספת של הוכחה באינדוקציה נקראת אינדוקציה חזקה:

1. בסיס האינדוקציה: נוכיח שהטענה P_1 נכונה

2. שלב האינדוקציה: נוכיח את **הגרירה** הבאה: לכל k טבעי, אם $P_1, P_2, ..., P_k$ נכונות, אז P_{k+1} נכונה (כלומר, מוכיחים $P_1, ..., P_k \Rightarrow P_{k+1}$).

שאלה לדיון: מה ההבדל בין שתי הגרסאות?

טענה: שתי הגרסאות שקולות.

<u>תרגיל</u>: הוכיחו כי כל מספר טבעי $n \geq 2$ הוא מכפלה של לפחות מספר ראשוני אחד השונה מ-1.

<u>פתרון</u>: ראשית, עבור $n = 2$ נקבל $2 = 2$ הוא הייצוג של 2 כמכפלה של ראשוניים. זה היה בסיס האינדוקציה. עבור שלב האינדוקציה, נניח שכל מספר $m \leq k$ הוא מכפלה של ראשוניים. כעת נסתכל על $k+1$. אם הוא ראשוני, אז זהו הייצוג שלו כמכפלה של ראשוניים. אם לא, אז לפי הגדרה, $k+1 = a \cdot b$ כאשר $a, b < k+1$ (מדוע?) ולכן לפי הנחת האינדוקציה, ל-a, b יש פירוק כמכפלה של לפחות מספר ראשוני אחד השונה מ-1. מכך נובעת ישירות הטענה על $k+1$.

נשים לב שבתרגיל זה נזקקנו לנכונות הנחת האינדוקציה לגבי כל מספר קטן/שווה ל-k .

אינדוקציה חזקה - תרגילים

חלק א – אינדוקציה חזקה

1. נגדיר את סדרת פיבונאצ'י באופן הבא $\begin{cases} F_0=0, F_1=1 \\ F_{n+2}=F_{n+1}+F_n \end{cases}$
האיברים הראשונים בסדרה הם: ...0,1,1,2,3,5,8,13. הוכיחו כי $F_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$ כי לכל $n\geq 0$ כאשר $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ו- $\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
2. הוכיחו שכל מספר גדול מ-12 הוא סכום של 4ים ו5ים (שימו לב לבסיס האינדוקציה).
3. הוכיחו: לכל קבוצה סופית של מספרים קיים איבר קטן ביותר.

נספח 3 - קומבינטוריקה

מתוך שילובי הבחירות האפשריים – עם/בלי סדר – עם/בלי החזרה, נותרנו להבין כמה בחירות לא סדורות של k איברים מתוך הקבוצה [n] קיימות.

התעלמות מסדר עם החזרות

שאלה כמה פתרונות יש למשוואה $\sum_{i=1}^{n} x_i = k$, כאשר $k,n\in\mathbb{N}$ ו- $x_i\in\mathbb{N}$ לכל $i\in[n]$?

תשובה בעיה זהה היא בכמה דרכים ניתן לבחור כיצד למקם בשורה k כדורים ו- $n-1$ מחיצות, שזה אותו דבר כמו לבחור אילו k איברים מתוך הקבוצה $[k+n-1]$ הנו כדור (והשאר מחיצות), כלומר $\binom{k+n-1}{k}$.

ניתן לחשוב על פתרון טבעי למשוואה $\sum_{i=1}^{n} x_i = k$
כבחירה "בלי סדר" של k עצמים "עם החזרות"
מתוך שק של n עצמים.
ישנם $\binom{k+n-1}{k}$ פתרונות כאלו.

שובך היונים

ראינו כי אין פונקציות חח"ע $[n] \to [k]$ כאשר $k > n$. למקרה זה יש שם: "עיקרון שובך היונים". בכל דרך שנכניס כמות יונים לכמות קטנה יותר של שובכים, תמיד יהיה שובך שיכיל יותר מיונה אחת.

אגב – על אף שעיקרון שובך היונים גורס כי יש שובך בו יותר מיונה אחת, הוא אינו מציג לנו את השובך עצמו. כלומר, עיקרון זה מאפשר לנו לדעת על קיום של אובייקט בלי לתת לנו את האובייקט!

תרגיל הראו כי בכל תת קבוצה של $A = \{0,1, \dots 9\}$ מגודל 6 יש שני מספרים שסכומם 9.

פתרון נשים לב כי $A = \bigcup_{n=0}^{4} \{n, 9-n\}$. תהי תת קבוצה B מגודל 6. אז מעקרון שובך היונים, כאשר $\{\{n, 9-n\} \big| n \in \{0,1, \dots 4\}\}$ השובכים ו- B היונים, קיימת קבוצה באיחוד שיותר מאיבר אחד ממנה ב- B, כלומר כולה מוכלת ב- B. סכום שני איברים אלו הנו 9, ולכן קיבלנו את שני המספרים המבוקשים.

למעשה, יש הכללה של עקרון שובך היונים, שקובעת שלכל $m, n, k \in \mathbb{N}$ כך ש- $k > mn$ ולכל פונקציה $[k] \to [n]$ קיים איבר בטווח עם יותר מ- m מקורות. עקרון שובך היונים הפרטי נמצא כאן עבור $m = 1$.

תרגיל הוכיחו כי בכל קבוצה של 6 אנשים, או שיש שלושה אנשים שכולם מכרים זה של זה, או שיש שלושה אנשים שכולם אינם מכרים זה של זה.

פתרון נבחר את אחד האנשים, לשם הדיון "מושיק", ונמיין את שארית האנשים לקבוצה של מכרים של מושיק M, ולקבוצה המשלימה M^c. נסמן את קבוצת האנשים ללא מושיק ב- H. מאחר ולפונקציית המיון שתיארנו $f: H \to \{M, M^c\}$ יש תחום מגודל 5 וטווח מגודל 2, מעקרון שובך היונים המוכלל יש איבר בטווח עם יותר מ- 2 מקורות (כי $2 \cdot 2 < 5$). נניח בה"כ שזהו M (כי אחרת הפתרון דומה מאוד). ניקח תת קבוצה $B \subseteq M$ מגודל 3. אם ב- B אף אחד לא מכר של אחר, אז זוהי קבוצה של שלושה שאינם מכרים. אחרת, יש ב- B שניים מכרים, והם שניהם מכרים של מושיק, ושוב מצאנו קבוצה של שלושה מכרים.

תרגיל נתונה קבוצה A של 12 מספרים דו-ספרתיים. הראו כי יש בקבוצה שני מספרים שהפרשם הוא מספר דו-ספרתי בו שתי הספרות זהות. [הספרות לפי בסיס 10.]

רמז שובך היונים על הפונקציה $A \to \{0, \dots 10\}$ של שארית חלוקה ב- 11.