

**School of Mathematical Sciences** בית הספר למדעי המתמטיקה  
 The Raymond and Beverly Sackler הפקולטה למדעים מדויקים  
 Faculty of Exact Sciences ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר  
 Tel Aviv University אוניברסיטת תל אביב

### מבחן סיווג במתמטיקה (07.07.2023)

משך המבחן: שלוש שעות  
 אין להשתמש במחשבון או בכל חומר עזר אחר  
 יש להוכיח כל טענה באופן מלא. תשובה נכונה ומלאה לכל שאלה נושאת 17 נקודות זכות

**התחילו כל שאלה בדף חדש וציינו בהבלטה את מספר השאלה. מחקו טיוטות**

1. א. הוכיחו: לכל  $n$  טבעי קיים  $m = m_n$  (טבעי גם כן) כך ש-

$$11m+1 \quad (n \text{ even})$$

$$10^n = 11m + (-1)^n =$$

$$11m-1 \quad (n \text{ odd})$$

ב. הוכיחו שמספר טבעי מתחלק ב-11 (ללא שארית) אם ורק אם סכום ספרותיו העשרוניות, בסימנים (פלוס, מינוס) מתחלפים לסרוגין, מתחלק ב-11 (ללא שארית).

2. על הישר הממשי נתון הקטע  $A=[0, n]$  ( $n$  מספר טבעי) ובו קבוצת הנקודות

$$B = \{x_1, x_2, \dots, x_{n+2}\} \subset A \quad \text{הוכיחו: או שקיים קטע } I_i = [i-1, i] \text{ עם } i \text{ מספר טבעי בין } 1 \text{ ל-} n$$

שעבורו  $|B \cap I_i| \geq 3$ , או שקיימים לפחות שני קטעים כאלה  $I_i$  ו- $I_j$  ( $j \neq i$ ) כך ש-

$$|B \cap I_i| \geq 2 \quad \text{וגם} \quad |B \cap I_j| \geq 2. \quad \text{(כזכור, } |K| \text{ מסמן את גודל הקבוצה } K \text{ כלומר את מספר איבריה).}$$

3. בכל אחת משתי המשוואות הבאות, מצאו את קבוצת כל המספרים הממשיים המקיימים אותה:

א. (נק' 8)  $4^x = 2^{x^2}$     ב. (נק' 9)  $\log_3 \sqrt{x+2} = \log_9(10-x)$

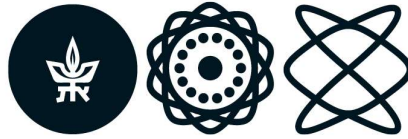
4. מצאו את כל המספרים הממשיים המקיימים  $\sin x + \sin 7x = \sin 3x + \sin 5x$

תזכורת:  $\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$      $\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \sin y \cdot \cos x$

5. הוכיחו: א. (נק' 10)  $5^m + 2^m$  מתחלק ב-7 לכל מספר אי-זוגי  $m$ .

ב. (נק' 7)  $5^n - 2^n$  מתחלק ב-3 לכל  $n$  טבעי.

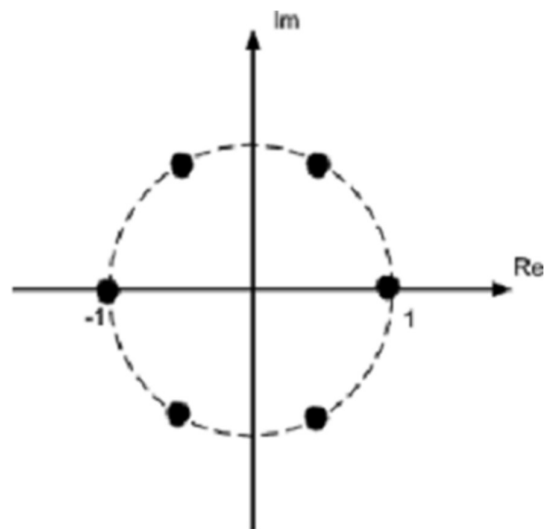
2/-



**School of Mathematical Sciences**  
The Raymond and Beverly Sackler  
Faculty of Exact Sciences  
Tel Aviv University

**בית הספר למדעי המתמטיקה**  
הפקולטה למדעים מדויקים  
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר  
אוניברסיטת תל אביב

6. שש הנקודות שלהלן, המסומנות על מעגל היחידה במישור המרוכב (מעגל ברדיוס 1 סביב הראשית) מייצגות את ששת שרשי היחידה ממעלה 6, כלומר את ששת המספרים המרוכבים  $z^6 = 1$  (מסודרים נגד כיוון השעון) המקיימים את המשוואה  $z^6 = 1$



- א. (9 נק') מצאו את המספרים  $z_1, z_2, z_4, z_5$  והציגו כל אחד מהם תחילה בהצגה פולארית  $z = |z|(\cos \phi + i \sin \phi)$  עם ערך  $|z|$  מתאים וזווית  $\phi$  מתאימה, ולאחר מכן בהצגה קרטזית  $z = x + iy$  עם  $x$  ו- $y$  מספרים ממשיים מתאימים.
- ב. (8 נק') בקרב ארבעת המספרים בסעיף א', האם יש כאלה המקיימים גם את המשוואה  $z^3 = 1$ ? אם כן – מצאו את כולם, אם לא – הוכיחו שאין כאלה.