School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

פתרונות (07.07.2023)

1. א. הוכיחו: לכל n טבעי קים $m=m_n$ (טבעי גם כן) כך ש-

$$10^n = 11m+(-1)^n = \begin{cases} 11m+1 & (n\, even) \\ 11m-1 & (n\, odd) \end{cases}$$

ב. הוכיחו שמספר טבעי מתחלק ב- 11 (ללא שארית) **אם ורק אם** סכום ספרותיו העשרוניות, בסימנים (פלוס, מינוס) מתחלפים לסרוגין, מתחלק ב-11 (ללא שארית).

פתרון: א.

$$10^1 = 10 = 1\times11-1 = 1\times11+(-1)^1,\ m_1=1 \quad 10^2 = 100 = 9\times11+1 = 9\times11+(-1)^2,\ m_2=9$$

הטענה נכונה איפוא עבור $n=1,2$. נניח (באינדוקציה) שהטענה נכונה עבור n ונוכיחנה ל-$n+2$ (המספר העוקב של n בעל אותה זוגיות):

$$10^{n+2} = 10^2\times10^n = (9\times11+(-1)^2)(11m_n+(-1)^n) = 11\times100m_n+(-1)^{n+2} \Rightarrow\ m_{n+2}=100m_n$$

ובכך הוכחה הטענה בשלימותה.

ב. יהי $N=\sum_{k=0}^{n} a_k 10^k$ מספר טבעי בעל $n+1$ הספרות העשרוניות $a_0,a_1,...,a_n\ \ (0\le a_k\le 9\ integers, a_n>0)$. אזי, לפי התוצאה בסעיף א',

$$N=\sum a_k 10^k = \sum a_k(11m_k+(-1)^k) = 11\sum a_k m_k + \sum(-1)^k a_k$$

המחובר הראשון באגף ימין הוא כפולה שלימה של 11 ולפיכך הסכום N מתחלק ב-11 אם-ורק-אם המחובר השני מתחלק אף הוא ב-11, אבל המחובר השני אינו אלא סכום הספרות בסימנים מתחלפים לסירוגין.

2. על הישר הממשי נתון הקטע $A=[0,n)$ (n מספר טבעי) ובו קבוצת הנקודות $B=\{x_1,x_2,...,x_{n+2}\}\subset A$. הוכיחו: או שקיים קטע $I_i=[i-1,i)$ עם i מספר טבעי בין 1 ל-n שעבורו $|B\cap I|\ge 3$, או שקיימים לפחות שני קטעים כאלה I_i ו-I_j ($j\ne i$) כך ש- $|B\cap I_i|\ge 2$ וגם $|B\cap I_j|\ge 2$. (כזכור, |K| מסמן את גודל הקבוצה K כלומר את מספר איבריה).

פתרון: אם לא קיימים קטעים כנ"ל, אז כל אחד מהקטעים I_j מכיל לכל היותר נקודה אחת של B ובסה"כ לכל היותר n נקודות, אבל $|B|=n+2$.

2/-

School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University
בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

3. בכל אחת משתי המשוואות הבאות, מצאו את קבוצת כל המספרים הממשיים המקיימים אותה:
א. (8 נק') $4^x = 2^{x^2}$ ב. (9 נק') $\log_3 \sqrt{x+2} = \log_9 (10-x)$

פתרון: א. $4^x = 2^{2x} = 2^{x^2} \Leftrightarrow 2x = x^2 \Leftrightarrow x=0 \ or\ x=2$ כך ש- $\{0,2\}$ היא הקבוצה המבוקשת בסעיף זה.

ב. $\log_9(10-x) = \frac{1}{2}\log_3(10-x) = \log_3\sqrt{x+2} = \frac{1}{2}\log_3(x+2) \Leftrightarrow 10-x = x+2 \Leftrightarrow x=4$

כך שהקבוצה המבוקשת בסעיף זה היא $\{4\}$.

4. מצאו את כל המספרים הממשיים המקיימים $\sin x + \sin 7x = \sin 3x + \sin 5x$

תזכורת: $\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \sin y \cdot \cos x \qquad \cos(x \pm y) = \cos \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$

פתרון:

$$\sin(7x)+\sin(x) = \sin(4x+3x)+\sin(4x-3x) = 2\sin(4x)\cos(3x)$$
$$\sin(3x)+\sin(5x) = \sin\left(4x-x\right)+\sin(4x+x) = 2\sin(4x)\cos(x)$$

השוואת שני האגפים הימניים נותנת (אחרי חלוקה ב- $2\sin(4x)$) נותנת $\cos(x) = \cos(3x)$

אלא שחילקנו בגודל שיכול להיות אפס, כך ש- $\sin(4x)=0$ אף הוא פתרון, כלומר

$x = n\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 4x = 2\pi n$ (לכל n שלם) שייכים לקבוצה המבוקשת. אבריה האחרים מקיימים את המשוואה

$$\cos(x)=\cos(3x)=\cos(x)cos(2x)-\sin(x)\sin(2x)=\cos(x)[\cos^2(x)-\sin^2(x)]-2\sin^2(x)\cos(x)$$

ומקבלים $\cos(x)=\cos(x)(1-2\sin^2(x))$ אז או ש- $\cos(x)=0$ או ש- $\sin(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$. במקרה

הראשון $x=\frac{\pi}{2}+n\pi$ ובמקרה השני $x=\frac{\pi}{4}+2n\pi \ or\ \frac{3}{4}\pi+2n\pi$

לסיכום, הקבוצה המבוקשת היא:

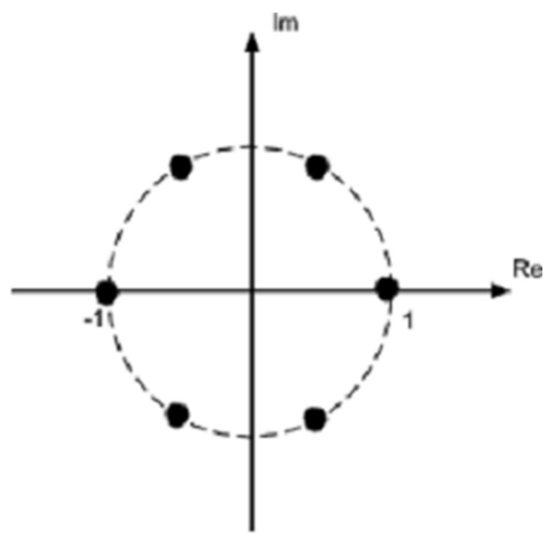
$$\{n\frac{\pi}{2} : n=0,\pm1,\pm2,...\} \cup \{\frac{\pi}{2}+n\pi : n=0,\pm1,\pm2,...\} \cup \{\frac{\pi}{4}+2n\pi : n=0,\pm1,\pm2,...\} \cup \{\frac{3}{4}\pi+2n\pi : n=0,\pm1,...\}$$

5. הוכיחו: א. (10 נק') $5^m + 2^m$ מתחלק ב-7 לכל מספר אי-זוגי m.
ב. (7 נק') $5^n - 2^n$ מתחלק ב-3 לכל n טבעי.

פתרון: א. בדקו שעבור m איזוגי, $5^m + 2^m = 7(5^{m-1} - 5^{m-2}\times 2 + 5^{m-3}\times 2^3 - ..., + 2^{m-1})$ כך שהביטוי הוא כפולה שלימה של 7. ניתן גם להוכיח את הטענה באינדוקציה.

ב. בדקו שלכל n טבעי $5^n - 2^n = 3(5^{n-1} + 5^{n-2}\times 2 + 5^{n-3}\times 2^2 + ... + 2^{n-1})$ וזו כפולה של 3.

6. שש הנקודות שלהלן, המסומנות על מעגל היחידה במישור המרוכב (מעגל ברדיוס 1 סביב הראשית) מייצגות את ששת שרשי היחידה ממעלה 6, כלומר את ששת המספרים המרוכבים $z_0=1, z_1, z_2, z_3=-1, z_4, z_5$ (מסודרים נגד כיוון השעון) המקיימים את המשוואה $z^6=1$



א. (9 נק') מצאו את המספרים z_1, z_2, z_4, z_5 והציגו כל אחד מהם תחילה בהצגה פולארית $z=|z|(\cos\phi+i\sin\phi)$ עם ערך $|z|$ מתאים וזווית ϕ מתאימה, ולאחר מכן בהצגה קרטזית $z=x+iy$ עם x ו- y מספרים ממשיים מתאימים.

ב. (8 נק') בקרב ארבעת המספרים בסעיף א', האם יש כאלה המקיימים גם את המשוואה $z^3=1$? אם כן – מצאו את כולם, אם לאו – הוכיחו שאין כאלה.

פתרון: א. נסדר את שרשי היחידה האלה, החל מ- $z_0=1$, לפי סדרם בניגוד לכיוון השעון:

$$z_1=\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad z_2=\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

●●● Pursuing the Unknown

בעקבות הלא נודע ●●●

School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

$$z_3 = \cos 180^\circ + i\sin 180^\circ = -1,\quad z_4 = \cos 240^\circ + i\sin 240^\circ = -\frac{1}{2} + (-\frac{\sqrt{3}}{2})i$$

$$z_5 = \cos 300^\circ + i\sin 300^\circ = \frac{1}{2} + (-\frac{\sqrt{3}}{2})i$$

ב. כן, z_2 כי $(z_2)^3 = \cos 360^\circ + \sin 360^\circ = 1$ וכמובן גם $(z_0)^3 = 1^3 = 1$. לשורשים האחרים אין התכונה הזאת.

●●● קריית האוניברסיטה, ת"ד 39040, רמת אביב, תל אביב 6139001 | טל': 6408044, 03-6408045 | פקס: 03-6407543
Tel Aviv University, P.O.box 39040, Ramat Aviv, Tel Aviv 6139001, Israel | Tel: 972-3-6408044, 6408045 | Fax: 972-3-6407543